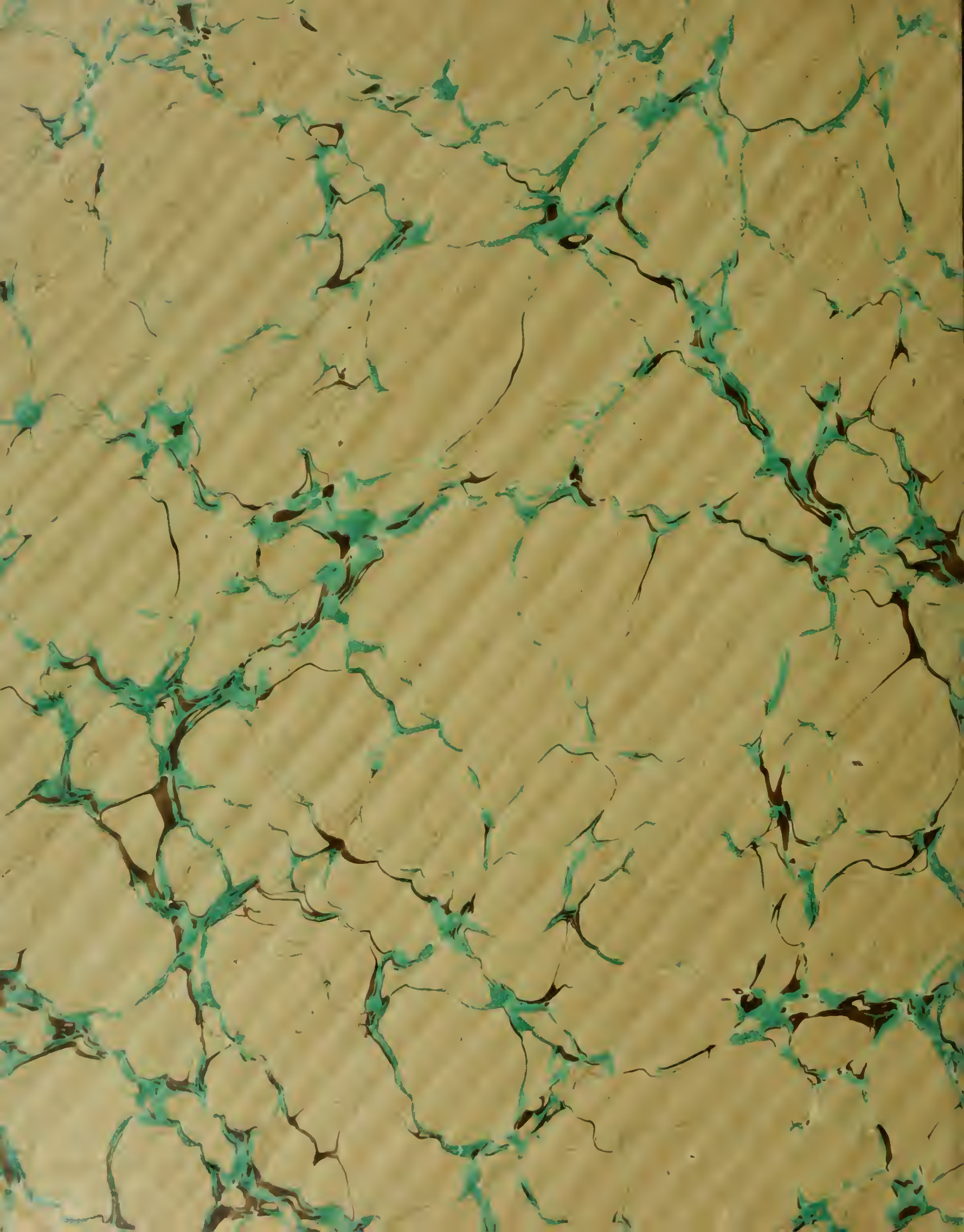
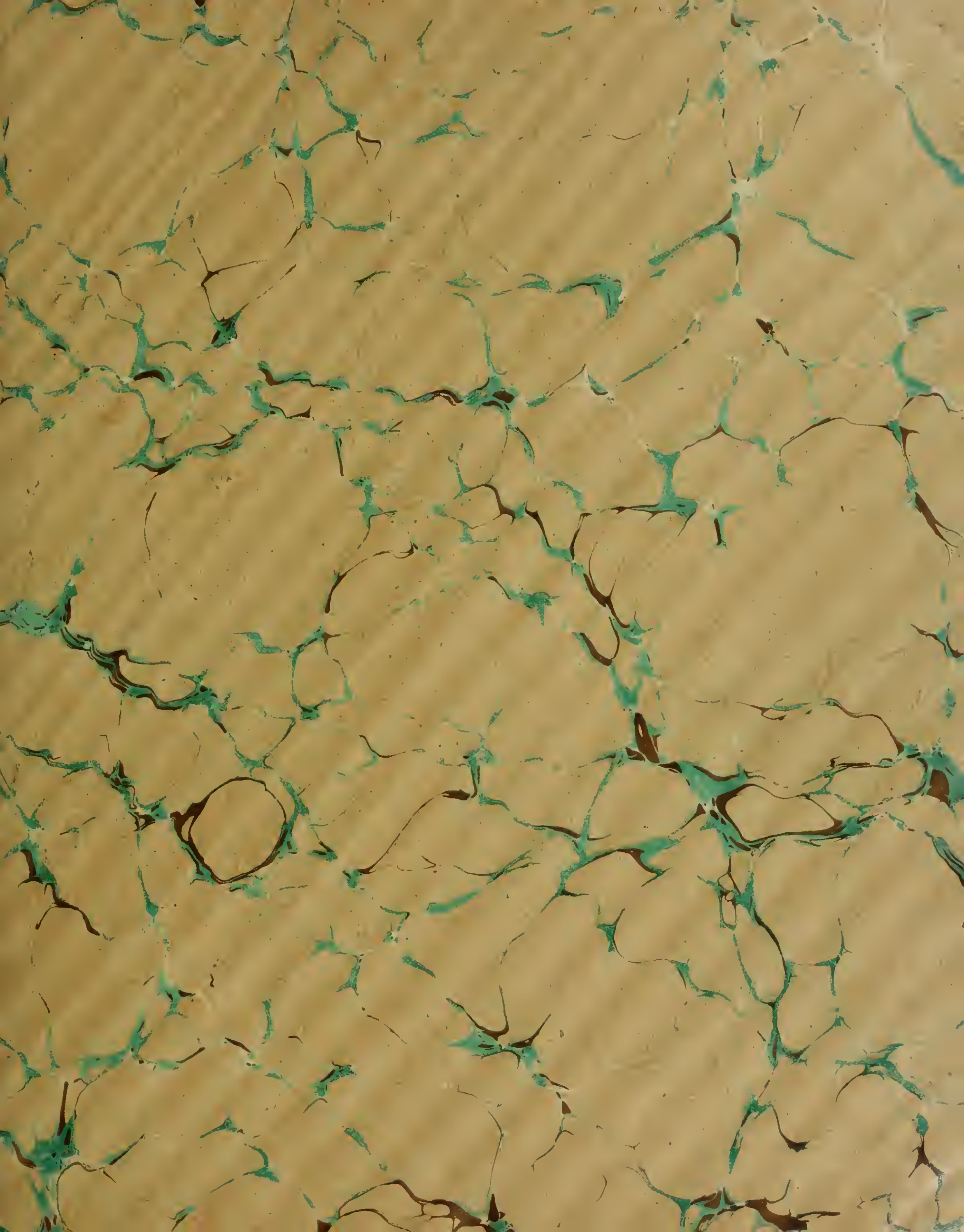






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME QUATRIÈME. — ANNÉE 1878.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1878

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série ;

PAR M. G. DARBOUX.

INTRODUCTION.

Dans son Mémoire sur les séries trigonométriques, Riemann fait la remarque que la théorie de ces développements a été pour certaines branches de l'Analyse l'origine des plus importants progrès. Après avoir tracé l'historique détaillé de cette grande théorie, après avoir reconnu toute la valeur du Mémoire célèbre de Dirichlet, il fait remarquer cependant que la démonstration de Dirichlet ne s'applique pas à certaines fonctions exceptionnelles, et il cherche à résoudre, sans aucune limitation, le problème suivant : *Une fonction étant définie de la manière la plus générale, quelles sont les conditions qui assurent la*

légitimité de son développement en série trigonométrique? ou, ce qui est la même chose, *quels sont les caractères distinctifs des séries trigonométriques considérées comme servant de développement à une fonction ?*

Le Mémoire de Riemann a rappelé l'attention sur une question qui paraissait épuisée, qui l'était même pour les fonctions ordinairement employées en Analyse. Plusieurs des élèves de l'illustre géomètre ont publié d'intéressants Mémoires sur cette théorie, en adoptant le point de vue de leur maître et en essayant de résoudre plusieurs difficultés relatives aux fonctions singulières et à la convergence des séries qui les développent.

Le point de départ de mon travail se trouve dans l'examen de questions toutes différentes relatives aux séries trigonométriques, questions qui ont été un peu négligées depuis la publication du Mémoire de Dirichlet. Avant lui, on avait essayé de démontrer la légitimité des développements trigonométriques, en se rendant compte de l'ordre de grandeur des termes de la série. Cette évaluation n'est pas suffisante, comme Dirichlet le fait remarquer; car il fallait démontrer non-seulement que la série est convergente, mais encore en déterminer la somme, ce qui présentait des difficultés sérieuses, levées pour la première fois et d'une manière complète par l'illustre géomètre.

On connaît les résultats obtenus par Dirichlet. Toute fonction de la nature de celles employées habituellement en Analyse sera développable tant qu'elle restera finie ou même quand elle deviendra, pour une ou plusieurs valeurs de la variable, infinie d'un ordre inférieur à 1, son intégrale restant, par conséquent, finie.

Dans le travail qui va suivre, je donne d'abord des caractères précis pour reconnaître l'ordre de grandeur des termes d'une série trigonométrique, j'applique ensuite les résultats obtenus à l'étude d'une belle question que Laplace s'est proposée dans le *Calcul des probabilités* et pour la solution de laquelle il a donné une méthode célèbre : à savoir l'approximation des fonctions de très-grands nombres qu'on rencontre, soit dans le Calcul des probabilités, soit en Mécanique céleste.

Il est facile de comprendre comment cette question se relie à celle que j'ai indiquée plus haut. La plupart des fonctions de très-grands nombres entrent ou peuvent entrer comme coefficients des puissances

élevées de x dans une série

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières de la variable. Or il suffit de remplacer dans de telles séries x par $Re^{i\omega}$ et de considérer ω comme la seule variable pour obtenir une série trigonométrique, et nos méthodes se prêtent alors à l'évaluation approchée des coefficients de la série.

Parmi les applications que j'ai développées, j'indiquerai les suivantes :

1° L'approximation des polynômes de Legendre. Je donne, en particulier, une formule qui permet d'obtenir une expression approchée, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$.

2° L'approximation indéfinie des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de

$$(1 - x^2)^{-\alpha}, \quad (1 + x^2)^{-\alpha}$$

et, en général, de

$$(x - a_1)^{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad (x - a_p)^{\alpha_p},$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ étant quelconques.

3° L'approximation de l'intégrale

$$\int f(x) \varphi^n(x)\, dx.$$

J'étends le résultat de Laplace au cas où les fonctions f et φ sont imaginaires, ainsi que les limites de l'intégrale.

4° L'approximation du terme général de la série de Lagrange

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \varphi^n(x).$$

5° L'approximation indéfinie des polynômes qui naissent de la série hypergéométrique, et qui ont été étudiés par Jacobi et par M. Tchebychef.

Ce dernier résultat m'a permis de résoudre une question intéressante.

Les polynômes de la série hypergéométrique peuvent être employés dans les développements. On peut exprimer une fonction par une série composée de ces polynômes tout à fait semblables à ceux de Legendre, qu'ils comprennent d'ailleurs comme cas particulier. Cette série est-elle convergente et représente-t-elle la fonction ?

L'étude de cette question m'a conduit à des résultats qui ne se présentent pas dans la théorie des séries trigonométriques. Pour plus de netteté, je les énoncerai ici en supposant que les polynômes qui entrent dans la série soient ceux de Legendre. En général, si la fonction ne devient pas infinie, alors même qu'elle serait discontinue, la série représente la fonction de la même manière que si elle était une série trigonométrique, c'est-à-dire que, si la fonction est discontinue pour $x = \alpha$, la série pour $x = \alpha$ aura pour somme

$$\frac{1}{2}[f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)].$$

Mais, si la fonction devient infinie pour l'une des limites extrêmes $+1$ ou -1, la série ne sera convergente que si l'ordre de l'infini est inférieur à $\frac{3}{4}$. Ainsi la fonction $(x-1)^{-\frac{4}{5}}$ ne serait pas développable en une série convergente de fonctions X_n, quoique les intégrales qui déterminent les coefficients de la série conservent un sens déterminé.

Après avoir examiné cette première question, j'étudie les mêmes séries en donnant à la variable des valeurs imaginaires, et je montre que les résultats connus pour les fonctions de Legendre se conservent pour les polynômes les plus généraux. Les courbes qui limitent la région de convergence sont des ellipses homofocales.

J'introduis des fonctions de seconde espèce, analogues à celles que l'on connaît pour les polynômes de Legendre, et je montre en terminant que la méthode employée dans ce Mémoire peut être appliquée à tous les développements ordonnés suivant des fonctions formant une suite de Sturm [*].

---

[*] Ce travail a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 7 février 1876.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Considérons une fonction réelle ou imaginaire d'une variable réelle x développée en série trigonométrique

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + \Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

On sait que l'on a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Supposons que l'on se propose de développer la dérivée de la même manière; on aura

$$f'(x) = \Sigma(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$

où les coefficients sont déterminés de même par les intégrales

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,dx,$$

et, en intégrant par partie,

$$a'_n = \frac{1}{\pi}[f(2\pi) - f(0)] + nb_n, \quad b'_n = -na_n.$$

Ces dernières formules supposent toutefois que $f(x)$ ne soit pas discontinue et, par exemple, ne passe pas brusquement d'une valeur à une autre quand x varie de zéro à 2π; elles supposent, en outre, que $f(x)$ ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégration. Admettons de plus que $f(x)$ soit une fonction analytique de période 2π. Dans ces conditions, la dérivée sera développable en série

trigonométrique, les formules deviendront

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n,$$

et, comme a'_n, b'_n tendent vers zéro, il en sera de même de na_n, nb_n. En étendant ce raisonnement au cas où l'on considère plusieurs dérivées successives, on obtient la proposition suivante :

Si la fonction périodique $f(x)$ est telle que sa $h-1^{ième}$ dérivée et, par conséquent, les précédentes demeurent toujours continues et finies, les produits $n^h a_n$, $n^h b_n$ ont pour limite zéro quand n croît indéfiniment.

Examinons maintenant le cas où la fonction réelle ou imaginaire $f(x)$ devient infinie entre les limites de l'intégration, mais de telle manière que, si $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, on puisse poser

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)^p} + \psi(x), \tag{2}$$

$\psi(x)$ demeurant finie pour $x = a$ et A étant une constante. Cette supposition se réalise dans l'immense majorité des cas, toutes les fois que p est plus petit que 1. Supposons d'abord pour plus de netteté qu'il y ait un seul infini de $f(x)$ entre les limites 0, 2π, alors on aura

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos n(x-t)\,dt}{(t-a)^p} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(t)\cos n(x-t)\,dt.$$

$\psi(x)$ demeurant finie, sa dérivée sera développable en série trigonométrique et, par conséquent, la seconde intégrale du second membre donne un terme dont le produit par n tend vers zéro. Évaluons la première. Si l'on y effectue la substitution

$$t = a + \frac{u}{n};$$

elle devient

$$\frac{A n^{p-1}}{\pi} \cos n(x-a) \int_{-na}^{2n\pi-na} \frac{\cos u\,du}{u^p}$$
$$+ \frac{A n^{p-1}}{\pi} \sin n(x-a) \int_{-na}^{2n\pi-na} \frac{\sin u\,du}{u^p}.$$

Les deux intégrales qui figurent dans cette expression tendent vers des limites finies et déterminées quand n augmente indéfiniment. Ces limites sont

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u\, du}{u^p}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u\, du}{u^p}.$$

On voit donc qu'ici la partie principale des coefficients a_n, b_n est de l'ordre de $\frac{1}{n^{1-p}}$, c'est-à-dire que son produit par n^{1-p} est une quantité finie, quoique en général indéterminée, à cause de la présence des facteurs $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$.

Il est du reste facile de déterminer les valeurs des intégrales (3). Elles se déduisent, en particulier, de celles que l'on trouve à la page 197 du *Calcul intégral* de M. Serret, et l'on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u\, du}{u^p} &= [1 + (-1)^p]\, \Gamma(1-p) \sin \frac{p\pi}{2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u\, du}{u^p} &= [1 - (-1)^p]\, \Gamma(1-p) \cos \frac{p\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

En général, la détermination que l'on doit prendre pour $(-1)^p$ et qui résulte de celle du radical $(x-a)^p$ est

$$(-1)^p = e^{-pi\pi}.$$

Dans ce cas, les formules (4) se simplifient, et l'on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u\, du}{u^p} = \frac{\pi}{\Gamma(p)} e^{-ip\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u\, du}{u^p} = \frac{-i\pi}{\Gamma(p)} e^{-ip\frac{\pi}{2}}.$$

Mais la valeur précise de ces intégrales nous sera inutile ; le seul point qu'il nous importe de connaître, c'est qu'elles sont finies.

Supposons maintenant que la fonction, tout en étant développable en série trigonométrique, admette plusieurs infinis, nécessairement

d'ordre inférieur à l'unité. Nous pourrons poser

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A'}{(x-a')^{p'}} + \ldots + \psi(x),$$

$\psi(x)$ demeurant toujours finie, et l'on appliquera la méthode précédente à chacun des termes du second membre. La partie principale des coefficients a_n, b_n s'obtiendra en remplaçant $f(x)$ par le terme correspondant à l'infini de l'ordre le plus élevé, et, s'il y en a plusieurs du même ordre, par la somme des termes correspondant à ces infinis de l'ordre le plus élevé.

On peut d'ailleurs étendre la méthode précédente de manière à obtenir une approximation indéfinie de a_n et de b_n.

En effet, il résulte des remarques déjà faites que, si la fonction et ses $p-1$ premières dérivées ne deviennent pas infinies, la $p^{ième}$ dérivée sera développable en série trigonométrique, les coefficients de $\sin nx$, $\cos nx$ étant $n^p a_n, n^p b_n$. Si maintenant cette dérivée d'ordre p devient infinie de l'ordre γ, le produit des coefficients précédents par $n^{1-\gamma}$ demeurera fini quand n croîtra. Ainsi :

Si la première dérivée de la fonction qui devient infinie est la dérivée $p^{ième}$ et si l'ordre de son plus grand infini est γ, les produits

$$n^{p+1-\gamma} a_n, \quad n^{p+1-\gamma} b_n$$

demeureront finis quand n croîtra indéfiniment.

D'après cela, si l'on peut trouver un groupe de termes ou une fonction $\varphi(x)$ se développant suivant la formule

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \Sigma(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

et tel que la $p^{ième}$ dérivée de $f(x) - \varphi(x)$ soit la première qui devient infinie, et qu'elle le devienne de l'ordre γ, on aura

$$a_n - \alpha_n = \frac{h}{n^{p+1-\gamma}}, \quad b_n - \beta_n = \frac{h_1}{n^{p+1-\gamma}},$$

h, h_1 désignant des quantités finies; α_n, β_n représentent donc a_n, b_n avec une approximation marquée par l'exposant $p+1-\gamma$.

Toutes les remarques qui précèdent sont bien simples, et la méthode précédente paraît au premier abord peu susceptible d'applications étendues. Nous espérons cependant que la suite de ce travail montrera qu'elle valait la peine d'être étudiée et proposée.

Une remarque générale peut d'ailleurs nous faire prévoir le succès de la méthode. La plupart des fonctions de très-grands nombres qu'on a à évaluer figurent comme coefficients dans les séries ordonnées suivant les puissances de la variable ; or les rapports qui existent entre ces séries et les séries trigonométriques sont bien connus. Dans le développement

$$A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n,$$

il suffit de remplacer la variable z par $Re^{i\omega}$, R et ω étant le module et l'argument de z, pour obtenir une série trigonométrique d'une variable réelle ω, R étant considéré comme constant, c'est-à-dire le point z se déplaçant sur le cercle de rayon R. Ces rapports entre les deux classes de séries ont même été utilisés par M. O. Bonnet pour la démonstration du théorème de Cauchy : le beau *Mémoire sur la théorie générale des séries* couronné par l'Académie de Bruxelles contient, en effet, la démonstration de la proposition suivante :

Si une fonction $f(z)$ est finie et uniforme à l'intérieur d'un cercle et que, sur le cercle même, elle soit développable en une série trigonométrique ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'argument, elle sera développable à l'intérieur du cercle en une série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable z.

Cette proposition permet l'étude d'une question qu'on laisse en général de côté quand on s'occupe du développement des fonctions suivant les puissances entières de la variable. La série qui développe $f(z)$ étant supposée convergente pour tous les points situés à une distance moindre que R de l'origine, que deviendra la série pour un point situé sur le cercle même de convergence? Nous voyons que, si $f(z)$, considérée comme fonction de l'argument ω de z sur le cercle de convergence, est développable en série trigonométrique, la série qui développe $f(z)$ suivant les puissances de z demeurera encore convergente sur le cercle limite ; elle cessera de l'être dans le cas contraire.

Cette remarque générale est confirmée par l'étude des cas parti-

culiers; ainsi la fonction $\log(1+z)$ se réduit sur le cercle de convergence à

$$\frac{i\omega}{2} + \log 2i + \log \sin \frac{\omega}{2},$$

et cette fonction est développable en série trigonométrique. Donc la série qui développe $\log(1+z)$ demeurera convergente et représentera la fonction, même sur le cercle de rayon 1. Il en est de même pour $\operatorname{arctang} x$, $\arcsin x$. Au contraire, la série du binôme qui développe $(1+z)^m$ ne sera pas toujours convergente sur le cercle limite. Si la partie réelle de m est négative et supérieure à l'unité en valeur absolue, $(1+z)^m$ deviendra infinie d'un ordre supérieur à 1 pour $z=-1$ et par conséquent ne sera pas développable en série trigonométrique convergente. Ainsi la série du binôme ne demeurera convergente sur le cercle limite que si la partie réelle de m est supérieure à -1, ce qui est conforme aux résultats trouvés par Abel.

Imaginons d'après cela qu'étant donnée une série

$$(5) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances de z, on veuille obtenir l'évaluation approchée du coefficient a_n pour n très-grand. Voici la méthode que l'on pourra suivre et qui réussit pour la plupart des fonctions que l'on a à considérer dans cette théorie.

Remarquons d'abord que, si R est le rayon du cercle de convergence, on aura

$$\lim a_n (R-h)^n = 0,$$

$R-h$ désignant un module quelconque inférieur à R. Quant à la limite de $a_n R^n$, elle dépend de la nature des séries et peut être nulle, finie, indéterminée, infinie.

Supposons d'abord que la convergence de la série cesse au delà du cercle de rayon R, parce que la fonction $f(z)$ admet sur le cercle de convergence un ou plusieurs points à *discontinuité polaire*, c'est-à-dire pour lesquels la fonction inverse $\frac{1}{f(z)}$ demeure finie et continue. Considérons d'abord le cas où il y a un seul point de ce genre. Soit α la

valeur de z correspondant à ce pôle : on pourra poser, comme on sait,

$$(6) \qquad f(z) = \frac{A_0}{(\alpha - z)^h} + \frac{A_1}{(\alpha - z)^{h-1}} + \cdots + \frac{A_{h-1}}{\alpha - z} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ demeurant finie pour $z = \alpha$ et étant par conséquent développable en une série

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n,$$

convergente dans un cercle de rayon ρ plus grand que R. En développant chacun des termes $\frac{A_i}{(\alpha - z)^{h-i}}$ suivant les puissances de z et égalant les coefficients de z^n dans les deux membres de l'équation (6), on aura

$$a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)$$
$$+ \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n \alpha^n.$$

Or la série qui développe $\varphi(z)$ étant convergente dans un cercle de rayon $\rho > R$, on a, en désignant par $\rho - k$ un nombre inférieur à ρ, mais supérieur à R,

$$\lim(\rho - k)^n b_n = 0,$$

et par conséquent

$$b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n},$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On a donc

$$(7) \quad \begin{cases} a_n \alpha^n = \dfrac{A_0}{\alpha^h}(n+1)\ldots(n+h-1) \\ \qquad + \dfrac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{A_{h-1}}{\alpha} + \varepsilon_n \left[\dfrac{\alpha}{(\rho - k)}\right]^n, \end{cases}$$

et ce développement se compose :

1° D'une suite de termes qui sont par rapport à n des ordres de

$$n^h, \quad n^{h-1}, \quad \ldots, \quad n, \quad n^0;$$

2° Du terme

$$\varepsilon_n \left(\frac{\alpha}{\rho - k}\right)^n,$$

qui est infiniment petit par rapport à toute puissance de $\frac{1}{n}$, puisque le module R de α est inférieur à $\rho - k$.

Si l'on demande seulement le premier terme de l'expression approchée de a_n, on aura

$$a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)(1+\varepsilon),$$

ou plus simplement

$$a_n = \frac{A_0 n^{h-1}}{\alpha^{n+h}}(1+\varepsilon'),$$

ε, ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il est clair que la méthode s'applique au cas où la fonction $f(z)$ possède plusieurs points à discontinuité polaire sur le cercle de convergence. On pourra alors poser

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-\alpha)^h} + \frac{A_1}{(z-\alpha)^{h-1}} + \ldots + \frac{B_0}{(z-\beta)^k} + \frac{B_1}{(z-\beta)^{k-1}} + \ldots + \varphi(z),$$

et l'on montrera comme précédemment que le développement de $\varphi(z)$ donne des termes d'ordre nul qu'on peut négliger, par rapport à ceux qui proviennent du développement des termes simples $\frac{A_0}{(z-\alpha)^h}, \cdots$ Si l'on veut avoir le premier terme seul de l'expression approchée de a_n, on pourra se borner à considérer celui des termes

$$\frac{A_0}{(z-\alpha)^h}, \quad \frac{B_0}{(z-\beta)^k}, \quad \ldots,$$

pour lequel l'exposant du dénominateur est le plus grand, ou, s'il y en a plusieurs de même exposant, le groupe des termes correspondant à l'exposant le plus élevé.

Tout ce qui précède est, on le voit, un corollaire des beaux résultats que cette partie de l'Analyse doit à Cauchy. De même que, pour dis-

cuter la convergence d'une série, il faut reconnaître quels sont les points de discontinuité de la fonction qu'elle développe, de même ici la recherche de la partie principale des coefficients de la série dépend de la manière dont la fonction devient infinie sur le cercle de convergence.

J'examinerai maintenant le cas où la fonction admet sur le cercle de convergence une discontinuité analogue à celle des radicaux algébriques. Supposons que, α étant la valeur de z à laquelle correspond cette discontinuité, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z), \tag{7}$$

φ et ψ désignant des fonctions développables suivant les puissances entières de $z-\alpha$ et k un nombre *fractionnaire positif ou négatif*. En développant $\varphi(z)$ suivant les puissances de $z-\alpha$, on pourra écrire

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha) + (z-\alpha)\varphi'(\alpha) + \ldots + (z-\alpha)^{p-1}\frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1} + (z-\alpha)^p \varpi(z),$$

$\varpi(z)$ étant de même nature que $\varphi(z)$, et par suite

$$\begin{aligned} f(z) = \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1}\ldots \\ + \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{k+p-1} + (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z), \end{aligned}$$

égalité que l'on pourra écrire

$$f(z) - \mathrm{U}_p = (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z), \tag{8}$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{U}_p = \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1} + \ldots + \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{p+k-1}.$$

Dans la formule (8), les deux membres sont deux expressions différentes d'une même fonction. Si l'on développe U_p suivant les puissances de z en une série

$$\mathrm{U}_p = \Sigma\, a'_n z^n,$$

le développement de cette fonction sera

$$(9) \qquad f(z) - \mathrm{U}_p = (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z) = \Sigma(a_n - a'_n)z^n.$$

De la première expression de la fonction $f(z) - \mathrm{U}_p$, il résulte que ce développement sera convergent à l'intérieur du cercle de rayon R, comme celui de $f(z)$, et que d'ailleurs cette fonction ne pourra devenir infinie ou discontinue sur le cercle de convergence que pour $z = \alpha$. Si nous avons pris p quelconque, mais assez grand pour que $p+k$ soit positif, il ressort de la deuxième expression de $f(z) - \mathrm{U}_p$ que cette fonction ne deviendra pas infinie pour $z = \alpha$, et par conséquent que son développement ne cessera pas d'être convergent sur le cercle-limite.

Posons

$$z = \mathrm{R}e^{i\omega},$$

la série (9)

$$(10) \qquad (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z) = \Sigma(a_n - a'_n)\mathrm{R}^n e^{ni\omega}$$

deviendra une série trigonométrique, et il est aisé de trouver l'ordre de grandeur de ses coefficients. Désignons par e le plus grand entier contenu dans $p+k$, on aura

$$p + k = e + f,$$

f étant la partie fractionnaire. La première dérivée de

$$(z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z),$$

qui deviendra infinie, sera celle de l'ordre $e+1$, et elle deviendra infinie de l'ordre de

$$(z-\alpha)^{f-1}$$

pour $z = \alpha$, les coefficients de la série (10) seront par conséquent, d'après ce qui a été démontré, de l'ordre de

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{e+f+1} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{p+k+1},$$

c'est-à-dire que l'on aura

$$(a_n - a'_n)R^n = \frac{h}{n^{p+k+1}},$$

h étant une quantité finie, quand n croît indéfiniment.

En d'autres termes, $a'_n R^n$ représente $a_n R^n$ avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$. On voit donc que, toutes les fois qu'on prendra un terme de plus dans U_p, c'est-à-dire qu'on ajoutera une unité à p, on aura un nouveau terme de la formule d'approximation des coefficients de la série qui développe $f(z)$.

Il est très-facile de trouver l'expression développée de a'_n. Si nous nous reportons à l'expression de U_p, et que nous développions chaque terme suivant la formule du binôme, nous aurons

$$\begin{aligned}\alpha^n a'_n = {} & \varphi(\alpha)(-1)^k \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \\ & - \varphi'(\alpha)(-1)^k \frac{(k+1)k\ldots(k-n+2)}{1.2\ldots n} + \frac{\varphi''(\alpha)}{1.2}(-1)^k \frac{(k+2)\ldots(k-n+3)}{1.2\ldots n} \\ & + \ldots + (-1)^{p+k-1} \frac{(k+p-1)\ldots(k+p-n)}{1.2\ldots n} \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}.\end{aligned}$$

Le rapport de chacun des termes au précédent est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. La partie principale de l'expression approchée des coefficients proviendra donc du terme en $\varphi(\alpha)$. Il est du reste facile de reconnaître l'ordre de chacun des termes. En effet, si l'on supprime le dernier en $\varphi_{p-1}(\alpha)$, c'est-à-dire si l'on change p en $p-1$, l'erreur commise sur $a_n \alpha^n$, en prenant $a'_n \alpha^n$ qui était de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$ deviendra de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k}}$. Donc le dernier terme en $\varphi_{p-1}(\alpha)$ est précisément de ce dernier ordre, et par conséquent le premier en $\varphi(\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n^{k+1}}$. C'est du reste ce qu'on établirait aussi en substituant aux factorielles leurs expressions approchées.

De tout ce qui précède résulte le théorème suivant :

Si sur le cercle de convergence la fonction $f(z)$ devient discontinue

à la manière des radicaux algébriques, et que l'on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions développables suivant les puissances de $z-\alpha$, la partie principale des coefficients de $f(z)$ s'obtiendra en substituant au développement de cette fonction celui de

$$\varphi(\alpha)(z-\alpha)^k;$$

si l'on veut obtenir une approximation plus grande, on remplacera $f(z)$ par

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \frac{(z-\alpha)^2}{1.2}\varphi''(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{1.2\ldots p}\varphi_p(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

l'erreur commise étant toujours de l'ordre du dernier terme ajouté dans l'expression approchée, multiplié par $\frac{1}{n}$.

Il est clair que si, sur le cercle de convergence, il y a plusieurs points de la nature précédente, il faudra les examiner séparément et réunir les termes provenant de chacun d'eux.

II.

Appliquons les propositions précédentes à la fonction X_n de Legendre, qui naît du développement

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \Sigma t^n X_n,$$

et supposons d'abord la variable x réelle et comprise entre -1 et $+1$. Posons $x = \cos\varphi$, la fonction précédente devient infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$

pour $t = e^{i\varphi}$, $t = e^{-i\varphi}$; car on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-te^{i\varphi})(1-te^{-i\varphi})}}.$$

En appliquant les règles données, on voit que, pour avoir l'expression approchée de X_n, il suffira de substituer à la fonction proposée la somme des deux termes

$$\frac{1}{\sqrt{(1-te^{i\varphi})(1-e^{-2i\varphi})}} + \frac{1}{\sqrt{(1-te^{-i\varphi})(1-e^{2i\varphi})}},$$

que l'on développe très-facilement suivant les puissances de t ; on aura ainsi

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{e^{ni\varphi}}{\sqrt{1-e^{-2i\varphi}}} + \frac{e^{-ni\varphi}}{\sqrt{1-e^{2i\varphi}}}\right);$$

ou, en réduisant et remplaçant le facteur numérique par son expression approchée $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$,

(11) $$X_n = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right],$$

l'erreur commise étant de l'ordre de $\frac{1}{n\sqrt{n}}$. C'est l'expression connue de Laplace.

La même méthode s'applique au cas où x est plus grand que 1 ou imaginaire. Posons, en effet,

$$x + \sqrt{x^2-1} = \xi,$$

et choisissons le signe du radical, de telle manière que le module de ξ soit plus grand que 1. Cela est possible dans le cas actuel. En effet, aux deux déterminations du radical correspondent pour ξ deux valeurs dont le produit est l'unité, et ces valeurs n'ont l'unité pour module que si x est compris entre -1 et $+1$. Dans tous les autres cas, l'une d'elles a un module supérieur à l'unité. Ce module est même susceptible d'une représentation géométrique élégante. C'est la somme

des deux demi-axes de l'ellipse ayant pour foyers les deux points $1, -1$ et passant par le point x.

La plus petite valeur de t qui annule $\sqrt{1-2tx+t^2}$ est $\frac{1}{\xi}$. L'expression $\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ sera donc développable en série convergente, tant que le module de t sera inférieur ou égal à $\frac{1}{\xi}$ sur le cercle de convergence; elle deviendra infinie pour $t=\frac{1}{\xi}$ et comme le terme simple

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t\xi)(1-\xi^{-2})}}.$$

La partie principale de $\frac{X_n}{\xi^n}$ sera donc le coefficient de t^n dans le développement de ce terme suivant les puissances de t, et l'on aura

$$(12) \qquad X_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}\left(1+\frac{p}{n}\right),$$

p demeurant une quantité finie lorsque, ξ restant fixe, n croît indéfiniment.

La même méthode s'applique aux polynômes très-importants qui naissent de la série hypergéométrique, et qui ont été considérés par Jacobi dans un travail posthume, inséré au tome 56 du *Journal de Crelle*, et par M. Tchebychef, dans un Mémoire de 1869 (Académie de Saint-Pétersbourg). On sait que la série hypergéométrique est définie par l'équation

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\,\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{1\,.\,2\ldots p}\frac{\beta\ldots(\beta+p-1)}{\gamma\ldots(\gamma+p-1)}x^p + \ldots.$$

Elle se termine si l'un des éléments α, β qui y entrent symétriquement est un nombre entier négatif. Jacobi donne, pour les polynômes qu'on obtient ainsi, l'expression élégante

$$(13) \quad X_n = F(\alpha+n,-n,\gamma,x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n+\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}.$$

Il en fait connaître une fonction génératrice qui a été aussi employée par M. Tchebychef. On a, en remplaçant, pour abréger, $1-2x$ par z,

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\left(t-1+\sqrt{1-2tz+t^2}\right)^{\gamma-1}\left(1+t-\sqrt{1-2tz+t^2}\right)^{\alpha-\gamma}}{(2t)^{\alpha-1}\sqrt{1-2tz+t^2}} = \mathrm{H} \\ &\quad = \sum \frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}\, t^n \mathrm{X}_n. \end{aligned} \right.$$

Or supposons x comprise entre zéro et 1, et posons $x=\sin^2\varphi$. Le premier membre est développable en série convergente, tant que le module de t est inférieur à l'unité, et il devient infini de l'ordre $\frac{1}{2}$ pour deux points du cercle de convergence correspondant aux valeurs $t=e^{2i\varphi}$, $t=e^{-2i\varphi}$. Appliquons la règle de l'article précédent. On aura les valeurs approchées des coefficients de la série en substituant à H la somme du terme

$$\mathrm{A} = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}(e^{2i\varphi}-1)^{\gamma-1}(e^{2i\varphi}+1)^{\alpha-\gamma}}{(2e^{2i\varphi})^{\alpha-1}\sqrt{(1-te^{-2i\varphi})(1-e^{-4i\varphi})}},$$

correspondant au premier infini, et du terme A′ correspondant au second infini, que l'on déduit du précédent en y changeant i en $-i$. Le développement de ces deux termes suivant les puissances de t s'effectue sans difficulté par la formule du binôme, et l'on obtient l'expression approchée du coefficient de t^n,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}\mathrm{X}_n &= \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma}\cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} \\ &\quad\times \cos\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]+\frac{p}{n\sqrt{n}} \end{aligned}$$

et, en remplaçant les factorielles par leurs expressions approchées,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X}_n &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}}\, n^{\frac{1}{2}-\gamma}\sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma}\cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cos\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]+\frac{p_1}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}}, \end{aligned} \right.$$

expression qui comprend comme cas particulier celle qui a été donnée

pour les polynômes de Legendre. Les dérivées des polynômes généraux X_n étant encore des séries hypergéométriques, on s'assurera aisément que ces expressions approchées peuvent être différentiées jusqu'à un ordre quelconque, mais fixe quand n croîtra; nous avons utilisé cette propriété dans notre Mémoire *Sur les fonctions de deux angles*, etc. (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XIX), pour obtenir les expressions approchées des dérivées des polynômes de Legendre.

Si la variable x est imaginaire ou n'est pas comprise entre zéro et 1, nous poserons encore

$$z = 1 - 2x, \quad z + \sqrt{z^2 - 1} = \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

le signe du radical étant déterminé par la condition que le module de ξ soit supérieur à l'unité. Le développement de H sera convergent tant que le module de t ne dépassera pas $\frac{1}{\xi}$. Sur le cercle de convergence, H aura un seul infini correspondant à la valeur $t = \frac{1}{\xi}$; en substituant donc à H le terme unique

$$\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}(1-\xi)^{\gamma-1}(1+\xi)^{\alpha-\gamma}}{2^{\alpha-1}\sqrt{(1-\xi^{-2})(1-t\xi)}},$$

et développant suivant les puissances de t, on sera conduit pour X_n à l'expression approchée

$$(16) \qquad X_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{2}-\gamma} 2^{\alpha-1} (1-\xi^{-1})^{\frac{1}{2}-\gamma} (1+\xi^{-1})^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \xi^n \left(1 + \frac{p}{n}\right),$$

expression qui se réduit bien à celle que nous avons obtenue pour les polynômes de Legendre quand on y fait $\alpha = \gamma = 1$. Elle est, on le voit, de la forme

$$(17) \qquad X_n = \varphi(\xi) n^{\frac{1}{2}-\gamma} \xi^n (1+\varepsilon), \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

$\varphi(\xi)$ désignant une fonction indépendante de n et ε une quantité de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

III.

Avant de continuer l'étude des polynômes précédents, nous allons montrer que la méthode que nous avons proposée s'applique à la plupart des exemples traités par Laplace et nous nous proposerons d'abord de trouver l'expression approchée, pour n très-grand, de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de l'expression $(1-x^2)^{-\alpha}$. Cette dérivée, divisée par $\Gamma(n+1)$, est le coefficient de t^n dans le développement de

$$[1-(x+t)^2]^{-\alpha},$$

suivant les puissances de t. Or ce développement sera évidemment convergent tant que le module de t sera inférieur au plus petit des modules des binômes $1-x$, $1+x$. Supposons d'abord que ces deux derniers modules ne soient pas égaux et que le plus petit soit celui de $1-x$. L'expression précédente pouvant s'écrire

$$(1-x-t)^{-\alpha}(1+x+t)^{-\alpha},$$

pour avoir l'expression approchée des coefficients des puissances de t dans son développement, il faudra, d'après la regle donnée, la remplacer par le terme simple

$$(1-x-t)^{-\alpha}2^{-\alpha},$$

qu'on obtient en remplaçant t par $1-x$ dans le second facteur. On obtient ainsi

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(1-x)^{n+\alpha}\,1.2\ldots n}\,2^{-\alpha}\left(1+\frac{p}{n}\right),$$

p ayant la signification déjà donnée, ou, en remplaçant les factorielles par leurs expressions approchées,

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{(1-x)^{n+\alpha}}(1+\varepsilon).$$

Si l'on fait $\alpha=\frac{1}{2}$, on retrouve le résultat de Laplace, résultat auquel ce

grand géomètre parvient par une analyse assez longue, et moins rigoureuse que la précédente.

Il nous reste à traiter le cas où les modules de $1-x$, $1+x$ sont égaux, c'est-à-dire où x est de la forme zi, z étant réel. Alors il y aura deux infinis sur le cercle de convergence, et il faudra réunir au terme précédent celui qu'on obtient en changeant dans l'équation x en $-x$. On a ainsi

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+\alpha}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+\alpha}}\right].$$

On voit que, si l'on change x en ix, on aura, pour toutes les valeurs réelles de x,

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x^2)^{-\alpha}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{i^n}{(1-ix)^{n+\alpha}}+\frac{(-i)^n}{(1+ix)^{n+\alpha}}\right].$$

La méthode s'applique sans modification au produit suivant :

$$(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_p)^{m_p},$$

et, sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que l'on sera conduit à la formule suivante :

$$(18)\quad \frac{d^n}{dx^n}(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_p)^{m_p}=(a_1-a_2)^{m_2}\ldots(a_1-a_p)^{m_p}\frac{d^n}{dx^n}(x-a_1)^{m_1}$$

où a_1 désigne celle des quantités $a_1, \ldots, a_p$ la plus rapprochée de x. S'il existe plusieurs racines également rapprochées, on prendra celle qui correspond à l'exposant le plus petit. S'il y en a plusieurs également rapprochées de x avec le même exposant, il faudra faire la somme des termes que l'équation (18) donnerait pour chacune d'elles. Du reste, ces résultats pourraient se justifier, quoique d'une manière moins simple, par l'application de la règle de Leibnitz relative à la différentiation d'un produit, et ils sont pleinement confirmés par ce que l'on sait sur les dérivées des fractions rationnelles.

Nous allons maintenant examiner une question tout à fait nouvelle et chercher comment on peut déterminer l'expression approchée du terme général de la série de Lagrange.

Soit

$$(19)\qquad y = x + t\varphi(y)$$

une équation définissant y en fonction de x et de t. On aura

$$(20)\qquad f(y)\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} \varphi^n(x) f(x).$$

La série sera convergente tant que t sera inférieur au plus petit des modules pour lesquels la racine qu'on développe cesse d'être uniforme. Supposons, comme cela a lieu dans le plus grand nombre des cas, que la convergence cesse parce que la racine devient double. Supposons que, pour $t = h$, y devienne égal à β et racine double. On aura

$$(21)\qquad \beta = x + h\varphi(\beta), \quad 1 = h\varphi'(\beta).$$

Pour avoir l'expression approchée de y dans le voisinage de β, posons

$$(22)\qquad y = \beta + z, \quad t = h + u,$$

z et u étant infiniment petites. Substituons ces valeurs dans l'équation proposée, et développons en série, nous aurons, en nous bornant au premier terme,

$$z^2 = -\frac{2u\varphi(\beta)}{h\varphi'(\beta)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - t\varphi'(\beta)} = -\frac{1}{hz\varphi'(\beta)},$$

d'où, en substituant et remplaçant u par $t - h$ et h par sa valeur déduite des formules

$$f(y)\frac{dy}{dx} = \frac{f(\beta)\varphi'(\beta)}{\sqrt{2\varphi(\beta)\varphi''(\beta)[1 - t\varphi'(\beta)]}}.$$

Ainsi la fonction qu'on développe devient infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ sur le cercle de convergence. En la réduisant au terme précédent, que l'on développera suivant les puissances de t, on aura la partie principale

de chaque coefficient. On trouve ainsi

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\frac{f(\beta)\varphi'^{n+1}(\beta)}{\sqrt{2\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}},$$

ou bien

$$(23)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{f(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{\varphi'^{n+1}(\beta)}{\sqrt{\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}}(1+\varepsilon).$$

Si dans cette formule on change n en $n-p$, $f(x)$ en $f(x)\varphi^p(x)$, on a

$$(24)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1-p)}\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{f(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{\varphi^p(\beta)\varphi'^{n-p+1}(\beta)}{\sqrt{\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}}(1+\varepsilon').$$

Si, en particulier, on fait $p=1$, on a le terme général de la série que développe non plus $f(y)\frac{dy}{dx}$, mais $f(y)$.

Ces formules, qui sont nouvelles, me paraissent intéressantes en ce qu'elles font dépendre l'expression approchée d'une fonction de x des valeurs d'une fonction d'une autre variable β.

Si, quand la variable t atteint le module h, il pouvait y avoir plusieurs valeurs de t pour lesquelles la racine qu'on développe devient égale à une autre, il faudrait faire entrer en considération plusieurs termes semblables à ceux que donne la formule (20).

C'est ce qui arrive notamment si, $\varphi(x)$ et x étant réels, β est imaginaire; car supposons que, lorsque t tend vers une valeur h, la racine qu'on développe tende vers la racine double β. Lorsque t tendra vers la valeur h' conjuguée de h, la racine y tendra vers la racine β' double et conjuguée de β. Il faudra donc ajouter au terme que donnent les formules (23), (24) le terme imaginaire conjugué, c'est-à-dire prendre le double de la partie réelle de ce terme.

Laplace a déjà traité par une méthode spéciale l'équation

$$u - e\sin u = \zeta,$$

que l'on rencontre dans la théorie des planètes.

IV.

Une des applications principales que Laplace traite dans cette théorie de l'approximation des fonctions de très-grands nombres consiste dans la solution de la question suivante : Trouver l'expression approchée de

$$\int u^s u'^{s'} u''^{s''}, \ldots f(x)\, dx$$

lorsque les exposants s, s', ... sont très-grands, u, u', u'', ..., $f(x)$ désignant des fonctions continues quelconques de x. Les exposants s, s', s'' peuvent être mis sous la forme $\alpha n + \beta$, où α et β sont finis et où n est un entier qui seul sera supposé très-grand. On voit que l'on aura à chercher la limite d'une expression de la forme

$$(25) \qquad v_n = \int_a^b \varphi^n(x) f(x)\, dx,$$

n étant entier.

On peut trouver beaucoup de développements dont les coefficients contiennent les intégrales précédentes. Par exemple, si l'on considère une fonction $\varpi(x)$ développable suivant la formule de Maclaurin

$$\varpi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

on aura

$$\int_a^b \varpi[t\varphi(x)] f(x)\, dx = a_0 v_0 + a_1 v_1 t + \ldots + a_n v_n t^n + \ldots.$$

Nous choisirons une fonction particulière et nous étudierons le développement

$$(26) \qquad \int_a^b \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3.5\ \ldots\ 2n-1}{2.4.6\ \ldots\ 2n} v_n t^n.$$

D'après la formule de Wallis, l'expression approchée du développement de $v_n t^n$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Supposons, pour traiter le cas le plus important, que la fonction

$\varphi(x)$ ait un ou plusieurs maxima et que sa plus grande valeur absolue ne corresponde pas à une des limites de l'intégrale. Supposons que cette valeur soit atteinte une seule fois pour $x = \alpha$. S'il n'en était ainsi, on décomposerait l'intégrale en plusieurs autres jouissant de cette propriété. La série

$$\frac{1}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3 \ldots 2n-1}{2.4 \ldots 2n} t^n \varphi^n(x)$$

sera convergente dans les limites de l'intégration tant que $t\varphi(\alpha)$ aura un module plus petit que l'unité. Multiplions par $f(x)\,dx$ et intégrons, nous retrouverons la formule (26), et nous voyons que le développement en série sera convergent toutes les fois que t sera inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$. Voyons comment l'intégrale devient infinie pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$.

A cet effet, considérons la différence entre cette intégrale et la suivante :

$$\int_a^b \frac{f(\alpha)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)(x-\alpha)^2}{2\varphi(\alpha)}}},$$

En se rappelant que $\varphi(\alpha)$ est un maximum et que, par conséquent, $\varphi'(\alpha)$ est nul, on verra facilement que la différence des deux intégrales demeure finie, même pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$. En effet, la différence des éléments correspondants peut alors s'écrire

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\alpha)}}} - \frac{f(\alpha)\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{-\frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}}},$$

et en réduisant cette différence de deux fractions à un dénominateur commun on reconnaîtra sans peine qu'elle reste finie pour $x = \alpha$. Ainsi l'intégrale (26) devient infinie comme l'intégrale plus simple

$$\int_a^b \frac{f(\alpha)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}(x-\alpha)^2}},$$

et, par conséquent, on aura la partie principale des coefficients de la série (26) en remplaçant l'intégrale du premier membre par le terme précédent. Comme d'ailleurs l'intégrale précédente est la somme de trois autres prises entre les limites suivantes :

$$\int_{a}^{\alpha-h}, \quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h}, \quad \int_{\alpha+h}^{b},$$

et que la première et la troisième de ces intégrales demeurent toujours finies, on pourra se borner, pour simplifier l'écriture, à la seconde, où h sera supposé fixe, mais aussi petit qu'on le voudra. Cette intégrale a pour valeur

$$\frac{f(\alpha)}{A} \log \frac{Ah + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + A^2h^2}}{-Ah + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + A^2h^2}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$A = \sqrt{\frac{-\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}}.$$

A sera une quantité réelle, puisque pour tout maximum en valeur absolue $\varphi(\alpha)$ et $\varphi''(\alpha)$ sont de signes contraires. Si t tend vers $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$, le dénominateur de la quantité placée sous le signe logarithmique devient nul. En multipliant par la quantité conjuguée, on a

$$2\frac{f(\alpha)}{A} \log\left[Ah + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + A^2h^2}\right] - \frac{f(\alpha)}{A} \log[1 - t\varphi(\alpha)].$$

La première partie de cette expression demeure finie, et il nous suffira de considérer la seconde

$$\frac{-f(\alpha)}{A} \log[1 - t\varphi(\alpha)] = -f(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}} \log[1 - t\varphi(\alpha)].$$

En la développant suivant les puissances de t, et prenant le coefficient de t^n, nous aurons l'expression approchée des coefficients de la formule (26)

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} v_n = f(\alpha)\frac{\varphi^n(\alpha)}{n}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon),$$

ou, en remplaçant la factorielle du premier membre par son expression approchée,

$$(27)\qquad v_n = \int_a^b f(x)\varphi^n(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,f(\alpha)\,\varphi^n(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}\,(1+\varepsilon').$$

C'est la formule de Laplace. Elle est établie en toute rigueur et ne suppose rien sur la nature de $f(x)$, qui peut être réelle ou imaginaire.

On peut encore obtenir le même résultat par la considération de l'intégrale plus simple

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{1-t\varphi(x)} = v_0 + v_1 t + \ldots + v_n t^n + \ldots.$$

Remarquons d'abord que, si on la décompose en trois

$$\int_a^{\alpha-h},\quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h},\quad \int_{\alpha+h}^b,$$

la première et la troisième demeurent finies pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$, et tout se borne à la considération de la seconde, où h est fixe, mais pris aussi petit qu'on le veut. Ainsi nous avons à rechercher une évaluation approchée de

$$\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} \frac{f(x)\,dx}{1-t\varphi(x)}.$$

Posons

$$1 - t\varphi(\alpha) = u^2,\quad x - \alpha = uz,$$

cette intégrale deviendra

$$\int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{u f(\alpha+uz)\,dz}{1-\varphi(\alpha+uz)\dfrac{1-u^2}{\varphi(\alpha)}}.$$

En développant l'élément suivant les puissances de u et nous bor-

naut aux deux premiers termes, nous trouvons

$$\frac{1}{u}\int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{f(\alpha)\,dz}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2} + \int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{z\,dz}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2}\left(f' + \frac{f\varphi'''}{6\varphi}\,\frac{z^2}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2}\right) + u\int + \ldots,$$

et il serait facile de prouver, comme dans la méthode précédente, que la différence entre l'intégrale proposée et la somme des deux précédentes demeure finie, même pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$. La première devenant infinie d'un ordre supérieur, nous pouvons négliger l'autre, et le calcul de cette première intégrale nous donne

$$\frac{2f(\alpha)}{u}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}\,\text{arc tang}\,\frac{h}{u}\sqrt{\frac{-\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}},$$

ou, pour u suffisamment petit,

$$\frac{\pi f(\alpha)}{u}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}} = \frac{\pi f(\alpha)}{\sqrt{1-t\varphi(\alpha)}}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}.$$

Le développement de ce terme suivant les puissances de t conduit au même résultat que la première méthode. Nous voyons d'ailleurs comment, en continuant le développement suivant les puissances de u, nous aurons autant de termes qu'on le voudra de l'expression approchée.

Il est à remarquer que la formule (27), établie pour n entier, s'applique au cas de n fractionnaire. En effet, soit n' la partie entière de n et posons $n = n' + k$, on aura

$$\int_a^b f(x)\varphi^{n'}(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{n'}}\,f(\alpha)\varphi^{n'}(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon).$$

En remplaçant $f(x)$ par $f(x)\varphi^k(x)$, et remarquant qu'il est indifférent de mettre n' ou n en dénominateur dans le second membre, nous retrouverons la formule (27), étendue au cas de n fractionnaire.

Laplace fait un grand nombre d'applications de cette formule. Nous

indiquerons seulement la suivante. Prenons

$$f(x) = x^{\alpha-1}, \quad \varphi(x) = xe^{-x}.$$

Le maximum de $\varphi(x)$ a lieu pour $x = 1$, et nous aurons

$$\int_0^\infty x^{n+\alpha-1} e^{-nx} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n^{n+\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}} e^{-n} \sqrt{2}$$

ou

(28) $$\Gamma(n+\alpha) = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\alpha-\frac{1}{2}}.$$

C'est l'expression approchée de Stirling. La présence de l'arbitraire α que nous y laissons est très-commode pour les applications.

Nous avons fait usage plusieurs fois déjà de cette expression approchée pour réduire les factorielles; mais remarquons que nous aurions pu commencer par cette application et que nous ne nous appuyons que sur le résultat

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

déduit de la formule de Wallis. Nous aurions même pu ne pas l'admettre et le déduire de la comparaison entre les deux résultats fournis par les deux méthodes que nous avons données successivement, mais cela n'a pas d'importance.

Avec des modifications convenables, la méthode précédente s'étend aux intégrales prises entre des limites imaginaires ou pour lesquelles $\varphi(x)$ est imaginaire. Reprenons le développement

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} \rho_n t^n,$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont maintenant des fonctions imaginaires définies dans une certaine région du plan.

Si l'intégrale est prise entre deux points A et B, la série

$$\frac{1}{\sqrt{1-t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} t^n \varphi_n(x)$$

sera convergente tant que $t\varphi(x)$ aura un module plus petit que l'unité.

Si cette condition est réalisée dans toute l'étendue de la ligne d'intégration, on pourra multiplier par $f(x)\,dx$ et intégrer; la série (29) sera convergente. Il suffit donc, pour que la convergence de cette série soit assurée, que t soit inférieur à l'inverse du module maximum de $\varphi(x)$ sur la ligne d'intégration.

Imaginons maintenant que l'on considère toutes les lignes d'intégration pour lesquelles l'intégrale conserve la même valeur. Il est clair que la ligne la plus avantageuse sera celle pour laquelle le module maximum sera le plus petit, car cette ligne donnera la plus grande valeur de t pour laquelle on sera assuré que la série demeure convergente. Ainsi il faut chercher, parmi toutes les lignes possibles d'intégration, celle pour laquelle le module maximum sera le plus petit, c'est-à-dire celle pour laquelle le module sera un minimum maximorum.

L'étude des modules jouissant de propriétés analogues a été faite à propos de la série de Lagrange, et l'on sait que, s'il en existe, les valeurs de x qui les donnent satisfont à l'équation

$$\varphi'(x) = 0.$$

Supposons donc, en nous plaçant dans cette hypothèse, que la ligne d'intégration passe par le point α, pour lequel on a

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad \text{mod. } \varphi(\alpha) \text{ minimum maximorum.}$$

Alors les raisonnements faits dans le cas des variables réelles subsistent entièrement. Si l'on suit une ligne d'intégration passant par le point α, l'intégrale demeure finie tant que le module de t est inférieur à $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$, et elle ne devient infinie que si l'on a $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$; alors elle devient infinie comme l'intégrale plus simple

$$\int \frac{f(\alpha)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}(x-\alpha)^2}}.$$

On est donc conduit à la même règle que dans le cas des variables réelles. La formule (27) s'applique encore aux intégrales imaginaires ainsi considérées, pourvu que les conditions supposées sur la ligne d'intégration puissent être remplies.

Appliquons ces considérations générales à l'étude de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\,\frac{x^n(1-x)^n}{(x-y)^n}\,dx,$$

où y et $f(x)$ peuvent être imaginaires. On a ici

$$\varphi(x) = \frac{x(1-x)}{x-y}.$$

L'équation qui donne α est la suivante :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha - y}$$

et l'on en déduit

$$\alpha = y \pm \sqrt{y^2 - y}.$$

Construisons les points correspondants aux deux racines de cette équation.



Si nous représentons sur le plan les points o, 1, y qui correspondent aux valeurs o, 1, y de la variable complexe, on prendra sur la bissectrice de l'angle $o\,y\,1$ deux longueurs égales $y\alpha$, $y\alpha'$, moyennes proportionnelles entre les deux rayons oy, $y1$. Les points α, α' ainsi obtenus représentent les deux racines de l'équation qui détermine α. Représentons, pour plus de netteté, les courbes d'égal module de la fonction

$$\frac{x(1-x)}{x-y}.$$

Ces courbes, pour de très-petites valeurs du module, sont de petits ovales décrits autour des points o, 1. Ces ovales grandissent avec le module et viennent se réunir au point α pour y former une courbe à point double; puis cette courbe continue à grandir jusqu'à ce qu'elle ait un point double en α', et ensuite elle se réduit à un ovale enveloppant le point y, entouré lui-même d'un autre ovale grandissant indéfiniment à mesure que la première se rapproche du point y. La figure montre que le module minimum maximorum, pour toutes les lignes d'intégration allant du point o au point 1, correspond au point α. Nous pouvons maintenant appliquer la formule (27).

On verra sans peine que, si l'on pose

$$\xi = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

le signe du radical étant pris de telle manière que le module soit plus grand que 1, on a

$$\alpha = \frac{1 - \xi^{-1}}{2}, \quad \alpha - y = \frac{\xi}{4}(1 - \xi^{-2}), \quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{\xi}, \quad \varphi''(\alpha) = -\frac{8}{\xi(1 - \xi^{-2})}.$$

On aura donc pour n très-grand

$$\int_0^1 f(x)\frac{x^n(1-x)^n dx}{(x-y)^n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\, f\left(\frac{1-\xi^{-1}}{2}\right)\xi^{-n}(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons, par exemple,

$$f(x) = \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{x-y},$$

et nous trouverons

$$(29)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\,dx}{(x-y)^{n+1}} \\ \displaystyle\qquad = 2^{2-\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(1-\xi^{-1})^{\gamma-\frac{3}{2}}(1+\xi^{-1})^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\xi^{-n-1}(1+\varepsilon). \end{cases}$$

Nous aurons à faire usage de cette formule.

V.

Jusqu'ici nous n'avons recherché que les premiers termes des expressions approchées. Nous allons maintenant appliquer le théorème donné à la fin de l'article 1[er], pour obtenir différentes formules d'approximation indéfinie. Rappelons en quelques mots l'énoncé de ce théorème. Si une fonction $f(z)$ est développable en une série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots,$$

convergente dans l'intérieur d'un cercle de rayon R et que la série cesse d'être convergente, parce que la fonction présente sur le cercle limite une ou plusieurs discontinuités, telle que pour l'une quelconque d'entre elles, ayant lieu au point α, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

φ et ψ étant des fonctions développables suivant les puissances de $z-\alpha$, on aura l'expression approchée de ses coefficients en substituant à la fonction $f(z)$ la somme

$$\Sigma(z-\alpha)^k \left[\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(z-\alpha) + \ldots + \varphi_p(\alpha)\frac{(z-\alpha)^p}{1.2\ldots p}\right],$$

étendue à tous les points de discontinuité, en développant chacun des termes de cette somme suivant les puissances de z et rangeant par ordre de grandeur tous les coefficients ainsi obtenus. L'ordre de l'erreur commise sera toujours celui du premier terme qu'on aurait à écrire si l'on voulait obtenir une approximation plus grande.

Appliquons d'abord ce théorème aux polynômes de Legendre, et pour cela considérons leur fonction génératrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Supposons d'abord x réel et posons $x = \cos\varphi$. Sur le cercle de convergence la fonction deviendra infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ pour

$$t = e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad t = e^{-i\varphi}.$$

Nous aurons ici

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = (t-e^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}(t-e^{-i\varphi})^{-\frac{1}{2}}.$$

En appliquant la proposition générale que nous venons de rappeler, substituons à la fonction les deux groupes de termes

$$\begin{aligned}\frac{(t-e^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2i\sin\varphi}}&\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^2+\ldots\right.\\ &\left.+(-1)^p\frac{1.3.5\ldots 2p-1}{2.4\ldots 2p}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^p\right]\\ &+\left(\frac{t-e^{-i\varphi}}{-2i\sin\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{t-e^{-i\varphi}}{2i\sin\varphi}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{t-e^{-i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^2+\ldots\right],\end{aligned}$$

imaginaires conjugués et correspondant aux deux infinis, si nous effectuons ensuite par la formule du binôme le développement de chacun des termes de la somme précédente, nous aurons

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}X_n = &\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\\ &\times\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right]}{2\sin\varphi}\right.\\ &\left.+\frac{1.3}{2.4}\frac{1.3}{(2n-3)(2n-5)}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\varphi+\frac{3\pi}{4}\right]}{(2\sin\varphi)^2}\ldots\right\}.\end{aligned}\right.$$

La loi est évidente. L'erreur commise est toujours de l'ordre du premier terme négligé. Ainsi, si l'on prend les p premiers termes, l'erreur sera de l'ordre de $\frac{1}{n^p\sqrt{n}}$.

Si x n'est pas compris entre -1 et $+1$ ou s'il est imaginaire, la fonction génératrice n'aura, comme nous l'avons vu, qu'une seule discontinuité sur le cercle de convergence et l'on trouvera de même

$$\begin{aligned}X_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}&\left[\xi^n-\frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}\frac{\xi^{n-2}}{1-\xi^{-2}}\right.\\ &\left.+\frac{1.3}{2.4}\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}\frac{\xi^{n-4}}{(1-\xi^{-2})^2}+\ldots\right],\end{aligned}$$

ξ ayant la signification déjà indiquée à l'article II.

Appliquons la même méthode à la dérivée déjà considérée

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha},$$

qui est le coefficient multiplié par $\Gamma(n+1)$ de t^n dans le développement de

$$[1-(x+t)^2]^{-\alpha}.$$

suivant les puissances de α. Si les modules de $1-x$, $1+x$ ne sont pas égaux et que celui de $1-x$ soit le plus petit, nous avons vu que la fonction précédente n'a qu'un point de discontinuité sur le cercle de convergenc eet, en appliquant le théorème général, on trouvera sans peine

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha} = 2^{-\alpha}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(1-x)^{n+\alpha}}\Bigg[1 &+ \frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{\alpha+n-1}\,\frac{1-x}{2} \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\,\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\ldots\Bigg].\end{aligned}$$

Si les modules de $1-x$, $1+x$ étaient égaux, il faudrait réunir aux termes précédents ceux qui en proviennent, en y changeant x en $-x$.

VI.

Proposons-nous de même de rechercher une formule d'approximation indéfinie des polynômes de la série hypergéométrique. Comme nous l'avons déjà dit, on peut en donner l'expression remarquable

$$X_n = F(\alpha+n, -n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1-\gamma}(1-x)^{n+\gamma-\alpha},$$

analogue à celle que l'on doit à Olinde Rodrigues pour les polynômes de Legendre et qui conduit aux mêmes conséquences.

Si l'on considère l'équation du second degré

$$(31)\qquad y = x + ty(1-y),$$

la formule de Lagrange nous donnera, comme on sait,

$$f(y)\frac{dy}{dx} = f(x) + \ldots + \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x) x^n (1-x)^n,$$

et, si l'on prend

$$f(x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha},$$

on aura

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+1-\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma},$$

ou

$$(32) \qquad y^{1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha}\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} t^n X_n.$$

En remplaçant, dans le premier membre, y, $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs, on aura la fonction génératrice considérée à l'article II, où nous avons donné le principal terme de la formule approchée de X_n.

Supposons que la variable x ne soit pas réelle et comprise entre zéro et 1, alors nous avons vu que, si l'on pose

$$\xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

le signe du radical étant pris de manière que le module de ξ soit plus grand que 1, la série (32) est convergente tant que t est inférieur à $\frac{1}{\xi}$, et, sur le cercle de convergence, le premier membre de cette équation admet une seule discontinuité et devient infini pour $t = \frac{1}{\xi}$. C'est, du reste, ce que l'on peut aussi conclure de la discussion de l'équation (31) du second degré qui donne y.

D'après cela, pour obtenir une approximation indéfinie des coefficients de la série (32) et par suite des polynômes X_n, la méthode générale nous indique qu'il faudra développer la fonction

$$y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x},$$

suivant les puissances de $t - \frac{1}{\xi}$, ou, ce qui est la même chose, de

$1 - \xi t$ en une série qui sera de la forme

$$\frac{A_0}{\sqrt{1-\xi t}} + A_1 + A_2\sqrt{1-\xi t} + A_3(1-\xi t) + \ldots,$$

et garder seulement les termes irrationnels; car les autres ne donnent pas de coefficient pour t^n, n étant suffisamment grand, et d'ailleurs leur ensemble constituera l'analogue de la fonction que nous avons appelée $\psi(z)$ dans le théorème général.

Tout se réduit donc à développer $y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\dfrac{\partial y}{\partial x}$ suivant les puissances de $\xi t - 1$. En gardant les p premiers termes irrationnels de ce développement et en les substituant à la fonction qu'on développe, on aura les p premiers termes de l'expression approchée des coefficients de la série (32).

Posons

$$\xi t - 1 = u^2,$$

et introduisons u à la place de t dans l'équation qui définit y. Elle prendra la forme remarquable

$$(33) \qquad y - x' = u\sqrt{y(1-y)},$$

où l'on a posé

$$x' = \frac{1-\xi}{2},$$

et qui se prête encore à l'application de la formule de Lagrange. Si, de l'équation (33), on tire $\dfrac{\partial y}{\partial x'}$, y étant considéré comme fonction de x' et de u, on établira facilement l'identité

$$(34) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\xi}{2u}\,\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1-y}}\,\frac{\partial y}{\partial x'},$$

et le premier membre de la formule (32) prendra la formule

$$\frac{\xi}{2u}\,y^{\gamma-\frac{3}{2}}(1-y)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\,\frac{\partial y}{\partial x'}.$$

On voit que, y étant considéré comme défini par l'équation (33), on

peut, en mettant à part $\frac{\xi}{2u}$, développer l'expression précédente suivant la formule de Lagrange, et l'on obtient ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{\xi}{2u} y^{\gamma-\frac{3}{2}}(1-y)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}} \frac{\partial y}{\partial x'} \\ &= \frac{\xi}{2u} \sum_{p=0} \frac{u^p}{1.2\ldots p} \frac{d^p}{dx'^p} x'^{\frac{p}{2}+\gamma-\frac{3}{2}}(1-x')^{\frac{p}{2}+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant x' par sa valeur $x' = \frac{1-\xi}{2}$,

$$(35)\left\{\begin{aligned} &y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma} \frac{\partial y}{\partial x} \\ &= 2^{1-\alpha}(-1)^{\gamma-1} \xi \sum_{p=0} \frac{(1-\xi t)^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(p+1)} \frac{d^p}{d\xi^p} (\xi-1)^{\frac{p}{2}+\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{\frac{p}{2}+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

En égalant les coefficients de t^n dans ce développement et dans la formule (32), nous aurons le résultat cherché. On trouve ainsi, en remplaçant x par sa valeur en fonction de ξ,

$$x = -\frac{(1-\xi)^2}{4},$$

et p par $2k$,

$$(36)\left\{\begin{aligned} &X_n \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n} (\xi-1)^{2\gamma-2}(\xi+1)^{2\alpha-2\gamma} \xi^{-n-\alpha} \\ &= \sum_{k=0} \frac{(1-2k)(3-2k)\ldots(2n-1-2k)}{\Gamma(2k+1)2.4\ldots 2n} \frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}} (\xi-1)^{k+\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{k+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right.$$

formule qui réalise l'approximation que nous avons en vue. En écrivant d'abord les premiers termes, elle prend la forme

$$\begin{aligned} &X_n \frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+\frac{1}{2})} (1-\xi^{-1})^{2\gamma-2}(1+\xi^{-1})^{2\alpha-2\gamma} \xi^{-n+\alpha-2} \\ &= (\xi-1)^{\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2(2n-1)} \frac{d^2}{d\xi^2} (\xi-1)^{\gamma-\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \frac{d^4}{d\xi^4} (\xi-1)^{\gamma+\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma+\frac{3}{2}} - \ldots, \end{aligned}$$

dont la loi est évidente.

On pourrait développer plus complétement cette formule en rem-

plaçant les dérivées qui y sont indiquées par leurs expressions, qu'il est facile d'obtenir. Nous nous contenterons de donner les deux premiers termes de la formule. On a ainsi

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma)}\xi^n(1-\xi^{-1})^{\gamma-\frac{1}{2}}(1+\xi^{-1})^{\frac{1}{2}+\alpha-\gamma}X_n \\ &\quad = 1 - \frac{(2\gamma-1)(2\alpha-2\gamma+1)}{4(2n-1)} - \frac{1+\xi^{-1}}{1-\xi^{-1}}\frac{(2\gamma-1)(2\gamma-3)}{8(2n-1)} \\ &\qquad - \frac{(2\alpha-2\gamma+1)(2\alpha-2\gamma-1)}{8(2n-1)}\frac{1-\xi^{-1}}{1+\xi^{-1}} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

les termes négligés étant de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que x n'est pas réel et compris entre zéro et 1; mais nous pouvons passer des résultats obtenus à ceux qui se rapportent à ce dernier cas. Alors la fonction

$$y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}$$

aura deux infinis sur le cercle de convergence correspondant aux valeurs

$$t = \xi, \quad t = \xi^{-1},$$

et il faudra réunir les termes relatifs à ces deux infinis. Si l'on pose

$$(38)\qquad x = \sin^2\varphi,$$

on trouve

$$\xi = e^{-2i\varphi}, \quad \xi^{-1} = e^{2i\varphi}.$$

Réunir les termes correspondant aux deux valeurs de t, ξ, ξ^{-1}, ce sera donc prendre le double de la partie réelle dans les formules (36) et (37). On trouve ainsi

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})X_n}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+\frac{1}{2})}\sin\varphi^{\gamma-\frac{1}{2}}\cos\varphi^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} \\ &\quad = \left[1-\frac{(2\gamma-1)(2\alpha-2\gamma+1)}{4(2n-1)}\right]\cos\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] \\ &\qquad - \sin\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] \\ &\qquad \times\left[\frac{(2\gamma-1)(2\gamma-3)}{8(2n-1)}\cot\varphi - \frac{(2\alpha-2\gamma+1)(2\alpha-2\gamma-1)}{8(2n-1)}\operatorname{tang}\varphi\right] \end{aligned}\right.$$

pour l'approximation du second ordre de X_n, formule qui est bien d'accord, d'une part, avec la première approximation, d'autre part, avec le résultat obtenu à l'article précédent pour les polynômes de Legendre.

Il est aisé de reconnaître que la même méthode sera applicable toutes les fois que l'on recherchera une formule d'approximation indéfinie pour les coefficients de la série de Lagrange. Reprenons l'équation

$$y = x + t\varphi(y), \tag{40}$$

qui donne

$$F(y) = \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F'(y)\varphi^n(y), \tag{41}$$

et supposons, comme nous l'avons déjà fait (art. III), que la convergence cesse, parce que, sur le cercle limite, la racine y qu'on développe devient double. En appelant alors β sa valeur, on a

$$\beta = x + h\varphi(\beta), \quad 1 = h\varphi'(\beta),$$

h désignant la valeur de t pour laquelle y devient racine double et égale à β. La méthode générale que nous avons suivie nous prescrit alors de développer la fonction $F(y)$ suivant les puissances de $t - h$ ou de $1 - t\varphi'(\beta)$ et de garder les seuls termes irrationnels. En développant ces termes irrationnels, on aura les différents termes de la formule d'approximation indéfinie des coefficients de la série (41). Or l'équation (40) peut s'écrire

$$y - \beta = \sqrt{1 - t\varphi'(\beta)}\,\varpi(y), \tag{42}$$

en posant

$$\varpi^2(y) = \frac{\varphi(y)(y-\beta)^2}{\varphi(y) - \varphi(\beta) - (y-\beta)\varphi'(\beta)},$$

et il est facile de voir que $\varpi(y)$ est une fonction demeurant finie pour $y = \beta$. Si, dans la formule (42), on pose

$$1 - t\varphi'(\beta) = u^2,$$

elle devient

$$y - \beta = u\,\varpi(y),$$

et, sous cette forme, on pourra appliquer la série de Lagrange à développer $F(y)$ suivant les puissances de u. On aura

$$F(y) = F(\beta) + \quad + \sum \frac{[1 - t\varphi'(\beta)]^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\varpi^n(y)F(y),$$

les dérivées $\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\varpi^n(y)F(y)$ étant prises pour $y = \beta$.

VII.

Les résultats relatifs à l'approximation indéfinie des polynômes X_n sont si essentiels dans notre analyse que nous croyons utile de les établir par une autre méthode, qui nous fera connaître du reste une propriété importante de l'erreur commise quand on remplace ces polynômes par leurs expressions approchées. Cette méthode a été déjà employée par M. Bonnet pour les polynômes de Legendre (voir *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. XVII, p. 265).

Rappelons d'abord quelques propriétés de ces polynômes. Ils satisfont à l'équation différentielle

$$(43)\quad x(1-x)\frac{d^2X_n}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{dX_n}{dx} + n(\alpha+n)X_n = 0.$$

On a aussi

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_m X_n\,dx = 0$$

et

$$(44)\quad J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n^2\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{2n+\alpha}\,\frac{\Gamma^2(\gamma)\,\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\gamma+n)}.$$

Cette dernière propriété est fort importante. Si nous remplaçons les Γ par leurs expressions approchées, on trouve, pour n très-grand,

$$(45)\qquad J_n = \Gamma^2(\gamma)\,n^{1-2\gamma}.$$

On a aussi

(46) $$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{n(2n+\alpha-2)(\alpha+n-\gamma)}{(2n+\alpha)(\alpha+n-1)(\gamma+n-1)}.$$

Cette expression de J_n conduit à une conséquence importante. Elle ne permet pas de fixer pour chaque valeur de x l'ordre de X_n, mais elle donne l'ordre de l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x) X_n dx,$$

où a et b sont compris entre zéro et 1, et où $\varphi(x)$ est une fonction quelconque que, pour plus de netteté, nous supposerons toujours finie. Comparons, en effet, cette intégrale à la suivante :

$$\int_a^b X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx,$$

qui est une fraction de J_n, θJ_n. Divisons l'intervalle (a, b) en deux séries d'intervalles, séparés ou juxtaposés, les uns pour lesquels X_n sera inférieur à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, H désignant un nombre positif quelconque, les autres pour lesquels X_n est supérieur en valeur absolue à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$. On aura, pour l'intégrale prise dans les premiers intervalles,

$$\int \varphi(x) X_n dx < Hn^{\frac{1}{2}-\gamma} \int \pm \varphi(x)\, dx < An^{\frac{1}{2}-\gamma} H,$$

le signe $\pm$ étant pris de telle manière que l'élément de l'intégrale soit toujours positif et A désignant une limite supérieure, nécessairement finie, de cette intégrale.

Comparons maintenant l'intégrale $\int \varphi(x) X_n dx$, prise dans les intervalles où X_n est plus grand que $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, à la suivante :

$$\int X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx = \theta_1 J_n,$$

prise dans les mêmes intervalles. On aura, d'après un théorème connu, une limite supérieure de la valeur de

$$\frac{\int \varphi(x) X_n dx}{\int X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx}:$$

en prenant le rapport des éléments correspondants des deux intégrales pour une valeur x' de x, comprise dans les limites de l'intégration, on aura donc

$$\frac{\int \varphi(x) X_n\, dx}{\theta_1 J_n} < \frac{\varphi(x') X'_n}{X'^2_n x'^{\gamma-1}(1-x')^{\alpha-\gamma}} < \frac{\varphi(x')}{X'_n x'^{\gamma-1}(1-x')^{\alpha-\gamma}},$$

et, comme X'_n est plus grand que $H n^{\frac{1}{2}-\gamma}$ dans tout l'intervalle de l'intégration, on aura, en remplaçant X'_n par sa limite inférieure,

$$\int \varphi(x) X_n dx < \theta_1 J_n \frac{\varphi(x')}{x'^{\gamma-1}(1-x')^{\alpha-\gamma}} \frac{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{H}.$$

Si l'on remplace J_n par son expression approchée, on a

$$\int \varphi(x) X_n dx < \frac{B}{H} n^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

B étant un nombre fini. En réunissant les résultats relatifs aux deux sens d'intervalles, on a, en valeur absolue,

$$(47) \qquad \int_a^b \varphi(x) X_n dx < \left(AH + \frac{B}{H}\right) n^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

A et B étant des nombres finis et H quelconque. Cette formule montre que l'intégrale est *au plus* de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$. Ainsi, sans que l'on connaisse l'ordre de X_n, le résultat relatif à J_n permet de fixer une limite supérieure de l'ordre de toutes les intégrales où X_n entre en facteur, prises entre deux limites fixes, comprises entre zéro et 1. C'est un résultat intéressant, dont nous allons faire usage.

Remplaçons, dans l'équation différentielle à laquelle satisfait X_n, x par $\sin^2\varphi$. Cette équation deviendra

$$(48) \qquad \frac{d^2 X_n}{d\varphi^2} + \frac{dX_n}{d\varphi}[(2\gamma-1)\cot\varphi - (2\alpha+1)\operatorname{tang}\varphi] + 4n(\alpha+n) X_n = 0.$$

Pour faire disparaître le second terme, effectuons la substitution

$$(49) \qquad X_n = u \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}},$$

nous aurons

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\left[(2n+\alpha)^2 - \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4\sin^2\varphi} - \frac{(\gamma-\alpha)^2-\frac{1}{4}}{\cos^2\varphi}\right] = 0.$$

Si nous posons

$$\lambda = \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4\sin^2\varphi} + \frac{(\gamma-\alpha)^2-\frac{1}{4}}{\cos^2\varphi},$$

l'équation prendra la forme

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u(2n+\alpha)^2 = \lambda u.$$

Considérons λu *comme une fonction connue de* φ, et proposons-nous d'intégrer cette équation. L'équation sans second membre aurait pour intégrale

$$u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h],$$

A et h étant des constantes. En appliquant la méthode de Cauchy, nous aurons pour l'intégrale de l'équation avec second membre

$$(50)\qquad u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] + \frac{1}{2n+\alpha}\int_p^\varphi u'\lambda'\sin[(2n+\alpha)(\varphi-\varphi')]\,d\varphi',$$

$u'\lambda'$ désignant ce que deviennent u et λ par le changement de φ en φ', et p étant quelconque. Tant que φ n'approche pas des valeurs zéro, $\frac{\pi}{2}$, λ' demeure fini, et le terme complémentaire, qui est de la forme (47), est au plus de l'ordre de $\frac{n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{2n+\alpha}$ ou $n^{-\frac{1}{2}-\gamma}$. On a donc

$$(51)\qquad u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] + p_1 n^{-\frac{1}{2}-\gamma},$$

p_1 demeurant toujours au-dessous d'une certaine limite, tant que φ ne s'approche ni de zéro ni de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire tant que x est compris entre ε et $1-\varepsilon'$, ε, ε' étant positifs et fixes quand n croît, mais d'ailleurs aussi petits qu'on le veut.

Quant aux constantes A et h, il est inutile de les chercher par cette méthode. Nos premiers résultats nous les ont fait connaître. En effet,

deux expressions

$$A\cos[(2n+\alpha)\varphi+h], \quad A'\cos[(2n+\alpha)\varphi+h']$$

ne peuvent représenter la même fonction avec la même approximation pour une infinité de valeurs de φ que si A, A', h, h' sont respectivement égales ou du moins différentes de quantités de l'ordre de celles qu'on néglige. Ce que le résultat actuel ajoute d'essentiel porte sur la limite de l'erreur commise. Nous voyons maintenant que l'on a

$$X_n = \frac{\Gamma(\gamma)\, n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{\sqrt{\pi}} \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \times \cos\left[(2n+\alpha)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] + \frac{p}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}},$$

où p est un nombre qui demeure au-dessous d'un nombre fixe, même quand x varie, pourvu qu'il reste compris entre ε et $1-\varepsilon'$, ε' étant fixes. Auparavant, nous savions seulement que ce nombre p demeure fini quand, x restant fixe, n croît indéfiniment, ce qui n'est pas équivalent au résultat actuellement établi.

Ainsi ces expressions approchées des polynômes X_n n'ont pas lieu dans le voisinage des valeurs 0, 1 de la variable x, et il est d'ailleurs facile de se rendre compte de ce résultat pour les fonctions de Legendre. Ces fonctions pour $x=1$ sont toujours égales à l'unité; or leur expression approchée, si elle était exacte pour $x=1$, les rendrait plus petites que toute quantité donnée, pour n croissant indéfiniment.

Si, dans l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx,$$

on remplace X_n par son expression approchée, elle devient

$$\frac{2\Gamma^2(\gamma)}{\pi} n^{1-2\gamma}\int u^2\,d\varphi = \frac{2\Gamma^2(\gamma)}{\pi} n^{1-2\gamma}\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon'+\frac{p}{n}\right),$$

ε' étant de la forme $a\varepsilon$, où a est fini.

On a donc

$$\left(\int_0^\varepsilon + \int_{1-\varepsilon}^1\right) X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = J_n\left(a\varepsilon + \frac{p}{n}\right),$$

où a et p sont des quantités finies, d'où il suit que le rapport de chacune de ces intégrales

$$\int_0^\varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1$$

à J_n pourra être rendu aussi petit qu'on le voudra dès que ε sera pris suffisamment petit et n suffisamment grand. Nous aurons à faire usage de ce résultat, qui supplée à l'expression approchée qu'on ne peut obtenir des polynômes X_n dans le voisinage des valeurs

$$x = 0, \quad x = 1.$$

Nous indiquerons maintenant comment on peut déterminer la forme de la deuxième approximation des polynômes X_n en partant de l'équation différentielle.

De la formule (51) on déduit, en y remplaçant φ par φ',

$$u' = A\cos[(2n+\alpha)\varphi' + h] + \frac{p'}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}},$$

p' étant toujours fini, quel que soit n, tant que φ' n'approche pas de zéro ou de $\frac{\pi}{2}$. Substituons cette valeur dans l'intégrale de la formule (50), nous aurons

$$\begin{aligned} u = {} & A\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] \\ & + \frac{A}{(2n+\alpha)}\int_k^{\varphi'} \lambda' \cos[(2n+\alpha)\varphi' + h]\sin[(2n+\alpha)(\varphi - \varphi')]\,d\varphi' \\ & - \int_k^{\varphi'} \frac{\lambda' p' \sin(2n+\alpha)(\varphi-\varphi')\,d\varphi'}{(2n+\alpha)n^{\frac{1}{2}+\gamma}}, \end{aligned}$$

p' étant toujours fini; la seconde intégrale est de la forme $\frac{p_1}{n^{\frac{3}{2}+\gamma}}$ où p_1 est, comme p', une quantité finie.

Quant à la première intégrale, on peut l'écrire

$$\frac{A}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi \left\{\lambda' \sin[(2n+\alpha)\varphi+h] + \lambda' \sin[(2n+\alpha)(\varphi-2\varphi')+h]\right\} d\varphi',$$

ou

$$\frac{A\sin[(2n+\alpha)\varphi+h]}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi \lambda' d\varphi' + \frac{A}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi \lambda' \sin[(2n+\alpha)(\varphi-2\varphi')+h]\,d\varphi'.$$

Une simple intégration par parties portant sur le sinus montre que la seconde intégrale est de l'ordre de $\frac{A}{n^2}$ ou, comme A est de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, de celui de $n^{-\frac{3}{2}-\gamma}$. Cette seconde intégrale peut donc être réunie au terme déjà trouvé du même ordre $\frac{p_1}{n^{\frac{3}{2}+\gamma}}$. On a d'ailleurs

$$\int_k^\varphi \lambda' d\varphi' = \frac{(2\gamma-2\alpha-1)(2\gamma-2\alpha+1)}{4}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}k) + \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4}(\cot k - \cot\varphi).$$

Les termes en $\operatorname{tang} k \cot k$ peuvent être négligés; on les ferait disparaître en modifiant convenablement la valeur de h, et l'on a pour u la formule définitive

$$(52)\quad \begin{cases} u = A\cos[(2n+\alpha)\varphi+h] + \dfrac{A}{8(2n+\alpha)}\sin[(2n+\alpha)\varphi+h] \\ \qquad \times[(2\gamma-2\alpha-1)(2\gamma-2\alpha+1)\operatorname{tang}\varphi \\ \qquad\quad -(1-2\gamma)(3-2\gamma)\cot\varphi] + \dfrac{p_1 n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{n^2}, \end{cases}$$

dont la forme est bien semblable à celle de la formule (39); p_1 sera, comme p, une quantité assujettie à demeurer au-dessous d'une limite fixe tant que x demeurera comprise entre ε et $1-\varepsilon'$, et cela quel que soit n.

En résumé, les termes de la première approximation sont de l'ordre de $\sqrt{J_n}$; ceux qui s'ajoutent dans la seconde approximation sont de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n}$; enfin l'erreur commise est de l'ordre $\frac{p_1\sqrt{J_n}}{n^2}$, p_1 étant fini tant que x n'approche ni de zéro ni de 1, quel que soit n.

Cette fonction inconnue p_1 de x et de n a encore une autre propriété : sa dérivée par rapport à x ou à φ est de la forme nq, q restant finie dans les mêmes conditions que p. Pour établir ce résultat, il suffit de se rappeler que, la dérivée de X_n étant une série hypergéométrique, on peut obtenir directement son expression approchée. Ainsi nous aurons deux formules d'approximation pour cette dérivée :

1° Celle qu'on obtiendrait en différentiant l'équation (52) ou (39) et qui contiendra la dérivée p'_1 de p_1 ;

2° Celle qu'on établirait directement par l'application des formules précédentes à cette dérivée.

La comparaison de ces expressions différentes nous donne le résultat cherché relatif à l'ordre de la dérivée p'_1, et nous montre qu'elle est de la forme nq, q étant au-dessous d'une certaine limite tant que x ne s'approche ni de zéro ni de 1. Je ne développe pas ce calcul, dont un peu d'attention fait reconnaître le résultat.

On pourrait, du reste, obtenir ces propriétés de l'erreur commise quand on substitue aux polynômes leurs expressions approchées en employant la méthode même qui nous a servi à obtenir ces expressions. Pour cela, nous allons reprendre l'étude du cas général et donner une limite de l'erreur commise quand on substitue aux fonctions considérées leurs expressions approchées.

Nous avons vu que, si une fonction $f(z)$ devient discontinue sur le cercle de convergence, dont nous désignerons encore le rayon par R, de telle manière que, pour le point α de discontinuité, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z), \tag{53}$$

φ et ψ étant des fonctions développables suivant les puissances entières de $z-\alpha$, il faut, pour obtenir les expressions approchées des coefficients de la série que développe $f(z)$, substituer à la fonction $f(z)$ l'expression

$$\left\{\begin{aligned} U_p = {} & \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1} + \dots \\ & + \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\dots p-1}(z-\alpha)^{k+p-1}, \end{aligned}\right. \tag{54}$$

que l'on développe suivant les puissances de z.

Si donc on pose

$$f(z) = \Sigma a_n z^n,$$
$$U_p = \Sigma \alpha_n z^n,$$

et que l'on désigne par $\varpi(z)$ la fonction

(55) $$\varpi(z) = f(z) - U_p = \Sigma \varepsilon_n z^n,$$

on aura

(56) $$a_n = \alpha_n + \varepsilon_n;$$

α_n sera l'expression approchée de a_n, ε_n l'erreur commise quand on substitue à a_n son expression approchée.

La fonction $\varpi(z)$, d'après son mode de formation, ne deviendra pas infinie pour $z = \alpha$, et il en sera de même de sa dérivée $e^{\text{ième}}$ si e désigne le plus grand nombre entier contenu dans $p + k$. Différentions e fois l'équation (55), nous aurons

$$\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e} = \Sigma n(n-1)\dots(n-e+1)\varepsilon_n z^{n-e},$$

et, la fonction du premier membre ne devenant pas infinie sur le cercle de convergence, la série qui la développe demeurera convergente sur ce cercle. Si nous multiplions les deux membres par z^{e-n} et que nous intégrions le long du contour formé par le cercle de convergence, nous aurons

$$2\pi n(n-1)\dots(n-e+1)\varepsilon_n = \int z^{e-n} \frac{d^e \varpi(z)}{dz^e} dz.$$

Si dans cette formule on remplace z par $Re^{\omega i}$, elle devient

(57) $$2\pi n(n-1)\dots(n-e+1)\varepsilon_n = R^{e-n+1} \int_0^{2\pi} e^{(e-n)\omega i} \frac{d^e \varpi(z)}{dz^e} ie^{\omega i} d\omega$$

et n'est pas autre chose que celle par laquelle on détermine les coefficients des séries trigonométriques.

La dérivée $\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e}$ ne devient pas infinie sur le cercle de convergence. Désignons par μ' le module maximum sur le cercle de cette dérivée.

Il est clair que, si la fonction $f(z)$, qui peut contenir dans son expression des paramètres variables autres que z, et les coefficients $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, ..., $\varphi^{p-1}(\alpha)$ demeurent finis sur le cercle de convergence quand ces paramètres varient, on pourra trouver une limite supérieure μ de μ' correspondant à toutes les valeurs de ces paramètres.

D'après cela, si nous remplaçons dans l'intégrale du second membre de l'équation (7) $\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e}$ par μ et $e^{(e-n)\omega i} i e^{\omega i}$ par 1, nous aurons une limite supérieure du module de cette intégrale qui sera

$$2\pi R^{e-n+1} \mu.$$

L'intégrale aura donc pour valeur

$$2\pi \mu \theta R^{e-n+1},$$

θ étant une quantité *réelle* ou *imaginaire,* dont le module sera inférieur à l'unité. La formule (57) deviendra donc

$$R^n \varepsilon_n = R^n (a_n - \alpha_n) = \frac{\theta R^{e+1} \mu}{n(n-1)\dots(n-e+1)}.$$

ou, plus simplement,

$$\text{(58)} \qquad R^n (a_n - \alpha_n) = \frac{a\mu}{n^e},$$

a étant une quantité finie quand n augmente.

La limite précédente est loin d'être assez précise; mais, par un artifice particulier, on peut en déduire une évaluation plus exacte de l'erreur commise. Supposons, en effet, qu'on change p en $p+2$, ce qui revient à ajouter deux termes à U_p,

$$\frac{\varphi^p(\alpha)(z-\alpha)^{p+k}}{12\dots p} + \frac{\varphi^{p+1}(\alpha)(z-\alpha)^{p+k+1}}{12\dots p+1},$$

et deux termes α'_n, α''_n à α_n qui proviendront du développement suivant les puissances de z de la somme précédente. Nous connaissons les ordres de α'_n, α''_n, et nous savons, en mettant ces ordres en évidence, que l'on a

$$\alpha'_n R^n = \frac{h}{n^{p+k+1}}, \quad \alpha''_n R^n = \frac{h'}{n^{p+k+2}}.$$

La formule (58) deviendra alors

$$\mathrm{R}^n(a_n - \alpha_n - \alpha'_n - \alpha''_n) = \frac{a\mu}{n^{e+2}},$$

ce qu'on peut écrire

$$(59)\qquad (a_n - \alpha_n)\mathrm{R}^n = \frac{h}{n^{p+k+1}} + \frac{h_1}{n^{p+k+2}} + \frac{a\mu}{n^{e+2}}.$$

Or, $e+2$ étant supérieur à $p+k+1$, le terme principal de cette formule sera le premier, car on peut l'écrire

$$(a_n - \alpha_n)\mathrm{R}^n = \frac{1}{n^{p+k+1}}\left(h + \frac{h_1}{n} + \frac{a\mu}{n^{e+1-p-k}}\right).$$

L'erreur est donc sensiblement égale au premier terme négligé.

S'il y avait plusieurs discontinuités sur le cercle de convergence, on répéterait pour leur ensemble le raisonnement que nous venons de faire pour l'une d'elles, et l'on obtiendrait un résultat tout semblable.

Dans l'exemple que nous avons traité des polynômes de la série hypergéométrique, la fonction $\varpi(z)$ et sa dérivée d'ordre e peuvent être ramenées à des expressions composées de radicaux et ne contenant en dénominateur que $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Donc, tant que x ne s'approche ni de zéro ni de 1, ces dénominateurs demeurent finis, et il en est d'ailleurs de même des coefficients de la formule d'approximation. La formule (59) nous montre donc que l'erreur commise lorsqu'on prend les k premiers termes de l'expression approchée est de la forme même à laquelle nous avons été conduits par l'équation différentielle, tant que x ne s'approche ni de zéro ni de l'unité.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

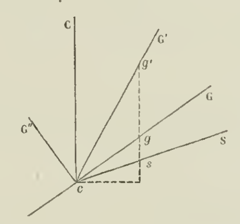
Sur les surfaces réglées;

PAR M. A. MANNHEIM.

Le travail de M. Franke, *Sur la courbure des surfaces réciproques*, qui vient de paraître dans le numéro de décembre 1877 de ce journal, est l'occasion de cette courte Note.

Prenons comme plan de la figure le plan central relatif à une génératrice G d'une surface gauche (G).

Appelons S la tangente en c à la ligne de striction (c) de (G); C la



direction conjuguée de S par rapport à l'indicatrice de (G) en c. Cette droite C est la caractéristique du plan central de G lorsqu'on passe du point central c au point infiniment voisin sur la ligne de striction (c). Menons sur le plan de la figure, et à partir de c, la droite G′ faisant avec G un angle donné. En construisant ainsi une droite dans chacun des plans centraux de (G), nous aurons pour le lieu de ces droites une surface (G′).

Je me propose de *déterminer le rapport des paramètres de distribution des plans tangents à* (G) *et* (G′) *pour les génératrices* G, G′.

Considérons l'angle de grandeur invariable (G, G'), dont le sommet c décrit la ligne de striction (c), dont le côté G coïncide successivement avec les génératrices de (G) et dont le plan reste tangent à cette surface aux différents points de (c).

Le déplacement infiniment petit de cet angle est un déplacement hélicoïdal. Pendant ce déplacement, G et G′ engendrent des éléments d'hélicoïde réglé qui se raccordent respectivement avec (G) et (G′) le long de G et de G′.

L'axe du déplacement hélicoïdal est parallèle à C; par suite, le plan central relatif à (G′) doit être parallèle à cette droite, c'est-à-dire qu'il se confond avec le plan central de (G), et alors c est le point central sur G′.

Ainsi *la surface* (G′) *a même ligne de striction que* (G); *ces deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre le long de cette ligne.*

Pour construire le paramètre de distribution des plans tangents à l'hélicoïde réglé qui se raccorde avec G, voici la construction que je donne dans mon cours à l'École Polytechnique. On élève en c une perpendiculaire à C et l'on porte sur cette droite un segment égal à la plus courte distance entre G et l'axe du déplacement hélicoïdal. De l'extrémité de ce segment on mène une parallele à C; la portion sg interceptée sur cette droite par S et G est le paramètre de distribution cherché.

De même pour G′ on a le paramètre sg'. Appelons K_G, $K_{G'}$ ces paramètres. On a alors

$$\frac{K_G}{K_{G'}} = \frac{sg}{sg'};$$

mais

$$sg = cs\,\frac{\sin(S, G)}{\sin(G, C)}, \quad sg' = cs\,\frac{\sin(S, G')}{\sin(G', C)}.$$

On a donc

$$(1) \qquad \frac{K_G}{K_{G'}} = \frac{\sin(S, C)}{\sin(G, C)}\,\frac{\sin(G', C)}{\sin(S, G')}.$$

Telle est la relation qui existe entre les paramètres de (G) et de (G′).

M. Franke a considéré le cas où G′ est perpendiculaire à G ([1]).

([1]) C'est M. Chasles qui, le premier, a considéré ce cas (voir *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*).

Plaçons-nous dans cette hypothèse et appelons G″ la perpendiculaire à G menée du point c. Dans ce cas la formule (1) devient

$$(2) \qquad \frac{K_G}{K_{G''}} = -\frac{\text{tang}(S, G)}{\text{tang}(G, C)}.$$

Transformons cette formule. Considérons une sphère de rayon 1 et sur cette sphère la courbe (γ) trace du cône qu'on obtient en menant du centre o de la sphère des rayons parallèles aux génératrices de (G).

Soit ol le rayon parallèle à G. Le plan normal à ce cône suivant ce rayon est parallèle au plan central relatif à G. Lorsqu'on passe au plan normal à ce cône, infiniment voisin de celui-ci, on a une caractéristique parallèle à C. Appelons oi cette caractéristique, le point i étant sur le plan tangent à la sphère en l.

Le segment il, qui est la tangente de l'angle iol, n'est autre que le rayon de courbure géodésique de la courbe (γ) au point l. Désignant par r ce rayon de courbure et remarquant que l'angle iol est égal à l'angle (G, C), la formule (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad \frac{K_G}{K_{G''}} = -\frac{\text{tang}(S, C)}{r}.$$

Cette formule revient à la formule (15) du travail de M. Franke.

Nous avons vu que la surface (G′) circonscrite à (G) le long de (c) a aussi cette courbe pour ligne de striction. On peut encore démontrer cette propriété de la manière suivante. Menons respectivement par G et G′ des plans normaux en c à (G.) Ces plans déterminent un dièdre qui, d'après la construction des génératrices de (G′), reste de grandeur constante, quelle que soit la position du point c sur (c).

Déplaçons infiniment peu ce dièdre, de façon que son arête, toujours normale à (G), passe par c', infiniment voisin de c sur (c) et que ses faces contiennent les génératrices de (G) et de (G′) qui passent par c'.

Puisque c est le point central sur G, la face qui contient cette droite touche (G) à l'infini ; par suite, la caractéristique de cette face est parallèle à G, et elle est alors perpendiculaire à l'arête du dièdre. Mais, on sait que dans ces conditions la caractéristique de l'autre face est

aussi perpendiculaire à l'arête du dièdre [1]; la face du dièdre qui contient G′ touche alors (G′) à l'infini. Le plan tangent en c, qui est perpendiculaire à cette face, est donc le plan central pour G′ et c est le point central sur cette droite. Comme c est un point arbitraire de (c), cette courbe est alors la ligne de striction de (G′).

On démontre de la même manière que : *Si l'on construit comme précédemment une surface* (G_1) *en employant, au lieu de* (c), *une courbe quelconque tracée sur* (G), *les points où cette courbe rencontre la ligne de striction de* (G) *sont des points centraux relatifs à des génératrices de* (G_1).

Ou autrement : *Les lignes de striction des surfaces* (G) *et* (G_1) *se coupent sur la courbe de contact de ces deux surfaces.*

---

[1] Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 juin 1877.

Réponse

à la Note de M. Allégret sur le Problème des trois corps

(t. III, p. 422);

Par M. Émile MATHIEU.

Je maintiens ce que j'ai dit dans une Note précédente (t. III, p. 216), à savoir que l'angle infiniment petit formé par les positions successives d'une droite mobile dans l'espace ou par les positions successives d'un plan mobile ne peut être assimilé à une différentielle, quand on applique les équations différentielles canoniques de la Dynamique. Avant la lecture des recherches de M. Allégret, ayant remarqué dans la composition d'un Mémoire publié (t. III, p. 1) que cette erreur se présentait très-naturellement et pouvait donner un abaissement illusoire du système des équations, j'avais eu soin d'en prévenir le lecteur (p. 13).

Comme les trois angles infiniment petits $d\rho$, $d\varpi$, $d\chi$, considérés par M. Allégret, sont des rotations autour de trois axes rectangulaires, j'ai pu prouver que, si l'on désigne par δ la caractéristique des variations virtuelles, on n'a pas

$$\delta d\rho = d\delta\rho, \quad \delta d\varpi = d\delta\varpi, \quad \delta d\chi = d\delta\chi,$$

en m'appuyant sur un passage de la *Mécanique analytique* de Lagrange (3e édit., t. II, p. 199). M. Allégret me reproche de me servir d'*un fragment posthume et fort obscur* de la seconde édition de cet Ouvrage. Pour moi je regarde au contraire cet article comme très-clair et comme un des plus remarquables.

Ainsi ρ, χ, ϖ ne peuvent être introduits comme variables dans les équations canoniques. M. Allégret fait observer dans sa Note qu'il ne regarde pas les quantités C, F, G comme des constantes et qu'il les suppose fonctions des trois angles qui déterminent la position du triangle des trois corps ; mais cela ne change rien à l'impossibilité qu'il y a d'appliquer les équations canoniques à ses variables.

Sur la déduction d'un nouveau principe d'Électrodynamique;

PAR M. R. CLAUSIUS,

Professeur à l'Université de Bonn.

Traduit de l'allemand par M. F. FOLIE.

Dans une courte Communication du 6 décembre 1875, j'ai énoncé un nouveau principe d'Électrodynamique, auquel j'ai donné une forme un peu plus simple dans une Communication du 7 février suivant. Dans ce qui suit, je vais m'occuper du développement nécessaire à l'établissement de ce principe, et montrer comment on peut, sans entrer dans aucune considération particulière sur la nature des forces électrodynamiques, déduire ce principe de faits bien établis, à l'aide d'hypothèses tout à fait générales, et qui ont déjà été faites fréquemment.

§ I. — *Différentes manières de voir sur l'électricité dynamique.*

On sait que M. W. Weber a cherché à ramener tous les phénomènes électrodynamiques à un principe unique, à l'aide duquel il exprime la force que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre. Soient e et e' deux particules d'électricité supposées concentrées chacune en un point, et r leur distance mutuelle au temps t, l'action exercée par ces particules l'une sur l'autre consiste, d'après Weber, en une répulsion mesurée par l'expression

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

dans laquelle c représente une constante.

Pour la déduction de cette formule, M. Weber est parti de cette idée que, dans un courant galvanique, des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative se meuvent en sens contraires, avec des vitesses égales, dans chaque élément conducteur. Cette idée est si compliquée, que déjà beaucoup de physiciens l'ont rejetée. Aussi longtemps, en effet, qu'il n'y a pas de motifs impérieux d'accepter l'hypothèse de ce double mouvement, il n'est pas permis d'abandonner cette idée plus simple, qu'un courant consiste dans le mouvement d'un seul fluide, et l'on doit chercher à en déduire l'explication des effets du courant galvanique.

Cette idée, qui a déjà été exprimée souvent et depuis longtemps, a reçu récemment, de M. C. Neumann, une forme plus déterminée, et il ajoute, à ce sujet, que ses réflexions concordent complétement avec celles que Riemann a déjà exprimées en 1854, dans la trentième réunion des naturalistes allemands. M. Neumann admet qu'un conducteur métallique renferme, à la vérité, dans chaque élément de volume, de l'électricité positive et de l'électricité négative, mais que la première seule est mobile, en ce sens qu'elle peut produire un courant dans le conducteur, tandis que la dernière est invariablement liée aux atomes pondérables.

Quant au point de savoir s'il est absolument nécessaire d'admettre, à côté de l'électricité positive mobile, une électricité négative liée aux atomes pondérables, ou bien si les forces attribuées à cette dernière électricité peuvent s'expliquer d'une autre manière, il y aurait encore peut-être différentes considérations à faire valoir. Toutefois, en traitant le sujet au point de vue mathématique, puisque les forces s'exercent absolument de la même manière qu'elles le feraient s'il y avait une électricité négative liée aux atomes, on peut considérer cette dernière comme existant, sans pour cela se décider relativement à son existence réelle. C'est dans ce sens que je prendrai pour base des considérations suivantes cette manière de voir, telle qu'elle a été formulée par M. Neumann.

§ II. — *Contradiction du principe de Weber avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur fixe.*

Posons-nous d'abord la question de savoir si le principe de Weber n'est pas en contradiction avec l'idée qu'il n'y a qu'une seule électricité qui puisse parcourir un conducteur fixe. Nous choisirons, à cette fin, la proposition expérimentale *qu'un courant galvanique fermé et constant, qui se trouve dans un conducteur au repos, n'exerce aucune force motrice sur l'électricité en repos*, et nous rechercherons si le principe de Weber conduit encore à cette proposition, lorsque l'on ne considère que l'une des deux électricités comme mobile.

Imaginons, au point x, y, z, une certaine quantité d'électricité, par exemple, *une unité* d'électricité positive, et au point x', y', z' un élément ds' d'un courant galvanique. Désignons par $h'ds'$ la quantité d'électricité positive en mouvement dans celui-ci. Cette quantité exerce, d'après Weber, sur l'unité d'électricité au repos, une répulsion qui est exprimée par

$$\frac{h'ds'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

expression qui, pour une valeur négative, indique naturellement une attraction. Dans le cas actuel, où la quantité r ne varie que par le mouvement de l'électricité qui se trouve dans l'élément de conducteur, nous pourrons poser

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

et, dans cette dernière formule, nous devrons faire, pour un courant constant, $\frac{d^2s'}{dt^2} = 0$, si nous supposons le conducteur du courant homogène et partout de la même section, de sorte que h' a, pour toutes

ses parties, une seule et même valeur. De cette manière, l'expression de la répulsion devient

$$\frac{h' ds'}{r^2}\left\{1+\frac{1}{c^2}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right\}.$$

Si l'on admet d'abord, avec Weber, que, dans l'élément de conducteur ds', il se meut une aussi grande quantité d'électricité négative en sens contraire, avec la même vitesse, on devra, pour obtenir la répulsion que celle-ci exercerait sur l'unité d'électricité au repos, affecter du signe — toute l'expression précédente, et en outre changer le signe du coefficient différentiel $\frac{ds'}{dt}$. Mais, comme ce coefficient différentiel n'entre qu'au carré, son changement de signe n'apportera aucune modification dans l'expression. L'action exercée par l'électricité négative serait donc égale et de signe contraire à celle qui est exercée par l'électricité positive, de sorte que ces deux forces se détruisent, et que l'élément de courant n'exercerait aucune action sur l'unité d'électricité au repos. Il en résulte donc que le principe de Weber, combiné avec l'idée de Weber sur le double mouvement de l'électricité, concorde avec la proposition expérimentale énoncée plus haut, puisque la force est nulle, non-seulement pour un courant fermé, mais encore pour tout élément de celui-ci en particulier.

Adoptons maintenant l'autre hypothèse, à savoir que l'électricité négative, qui se trouve dans le conducteur, ne s'écoule pas, mais soit invariablement fixée aux atomes pondérables. Alors l'action qu'elle exerce sur l'unité d'électricité au repos est simplement représentée par l'expression $-\frac{h' ds'}{r^2}$, donnée en Électrostatique. Il s'ensuit que les deux forces ne se détruisent pas dans ce cas, mais qu'il reste une répulsion donnée par l'expression

$$\frac{h' ds'}{c^2 r^2}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

On trouvera la composante de cette force, suivant l'axe des x, en multipliant cette expression par $\frac{x-x'}{r}$, et il en résulte l'équation

suivante, si l'on représente cette composante par $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$:

$$(1) \qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{x-x'}{r^3}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + 2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]ds'.$$

On doit intégrer cette équation, relativement à s', dans toute l'étendue du courant fermé, pour obtenir la quantité $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire la composante, suivant l'axe des x, de l'action que le courant tout entier exerce sur l'électricité au repos.

A cet effet, nous opérerons quelques transformations sur le second membre de cette équation. On peut poser

$$\frac{x-x'}{r^{\frac{3}{2}}} = 2\frac{d\sqrt{r}}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + 2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right] = 4\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}.$$

L'équation (1) devient ainsi

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}ds'.$$

Dans celle-ci, on peut de plus poser

$$\begin{aligned}\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2} &= \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right) - \frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'dx}\\ &= \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2\right],\end{aligned}$$

ce qui transforme l'équation (2) en

$$(3) \qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\left\{\frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2\right]\right\}ds'.$$

Si l'on intègre cette équation pour un circuit fermé, le premier terme de la parenthèse, qui est un coefficient différentiel, par rapport à s', donnera une valeur nulle. Le second terme, qui est un coefficient différentiel par rapport à x, peut être intégré sous le signe de la différentiation, puisque la variable x est indépendante de la variable s'; on

trouvera ainsi

$$(4) \qquad \mathfrak{X} = -\frac{4h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{d}{dx}\int\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2 ds'.$$

On aura des expressions analogues pour les composantes de la force, suivant les axes des y et des z.

On voit immédiatement que l'intégrale qui entre dans ces expressions n'est pas nulle, et qu'en général ses coefficients différentiels, par rapport à x, y, z, ne seront pas nuls non plus. D'après cela, un courant fermé et constant, dans un conducteur au repos, devrait exercer une action sur l'électricité au repos; et cette action aurait un ergal, puisque ses composantes suivant les axes seraient représentées, en vertu de l'équation précédente, par les coefficients différentiels négatifs d'une quantité qui dépend des coordonnées de l'unité d'électricité au repos considérée. Le courant galvanique devrait donc, à la façon d'un corps chargé d'un excès d'électricité positive ou négative, produire une modification de la distribution de l'électricité, dans tout corps conducteur qui se trouve dans son voisinage [*]. Si l'on explique le magnétisme par des courants moléculaires électriques, on trouvera qu'un aimant exerce des actions analogues sur les corps conducteurs qui l'environnent. Or de semblables actions n'ont jamais été observées, malgré les nombreuses occasions que l'on aurait eues de le faire, et, par conséquent, on doit reconnaître comme une proposition expérimentale bien établie la proposition précédente qui exprime qu'elles n'ont pas lieu; or, puisque le résultat exprimé dans l'équation (4) est contradictoire avec cette proposition, on en déduit cette conclusion, que le principe de Weber est incompatible avec l'idée que l'électricité positive seule se meut dans un courant galvanique qui circule dans un conducteur fixe.

---

[*] La même conclusion a déjà été tirée par M. Riecke en 1873 (*Annales de Göttingue*, juillet 1873). Je ne connaissais pas cette circonstance lorsque j'ai écrit mon travail, et je viens de l'apprendre pendant l'impression, par un nouveau Mémoire de M. Riecke, qui vient de paraître (*Annales de Göttingue*, 28 juin 1876), et dans lequel le Mémoire précédent est cité.

§ III. — *Discussion d'une loi posée par Riemann relativement à la force, et envisagée au point de vue précédent.*

Tout récemment, après que ma première Communication sur le principe que j'ai posé avait été publiée, il a paru un Ouvrage [*] dans lequel on expose une autre loi électrodynamique donnée par Riemann dans ses Leçons; il sera utile, comme suite à ce qui précède, de considérer cette loi au même point de vue, c'est-à-dire de rechercher si elle est compatible avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans le conducteur fixe.

Soient, comme plus haut, e et e' deux particules d'électricité supposées concentrées chacune en un point; x, y, z, x', y', z' leurs coordonnées rectangulaires au temps t; la composante suivant l'axe des x de la force que e' exerce sur e est, suivant Riemann (p. 327), exprimée par

$$(5) \qquad X = \frac{ee'}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{ee'}{c^2}\frac{d\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)\right]}{dt} + \frac{ee'}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2\right];$$

et les composantes suivant les autres axes sont données par des expressions analogues.

Nous allons encore déterminer, au moyen de cette équation, l'action qu'un courant galvanique fermé exerce sur une unité d'électricité au repos. Posons donc

$$e = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

En outre, pour déterminer d'abord l'action exercée par l'électricité positive en mouvement dans l'élément du conducteur ds', remplaçons

[*] *Schwere Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhardt Riemann, bearbeitet von Karl Hattendorff;* Hannover, 1876.

e' par $h'ds'$. L'expression précédente deviendra

$$h'ds'\left\{\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{c^2}\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{dt}\right)}{dt}+\frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

La dernière parenthèse peut se remplacer par $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$; et, dans le second terme de l'expression, on peut considérer x' et r comme fonction de s', et s' comme fonction de t; cela fait, on devra poser $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$, puisque le courant est constant, et l'on aura

$$h'ds'\left[\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{c^2}\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)}{ds'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right].$$

Partons d'abord de l'hypothèse que, dans l'élément de conducteur ds', une même quantité d'électricité négative circule, avec la même vitesse, en sens contraire; pour trouver la composante, suivant l'axe des x, de cette quantité d'électricité sur l'unité d'électricité au repos, nous n'aurons qu'à prendre l'expression précédente en signe contraire. Les deux forces se détruiront donc; et il en résulte que, dans l'hypothèse de deux électricités qui se meuvent dans le conducteur, la loi de Riemann est d'accord avec notre proposition expérimentale.

Partons au contraire de ce que l'électricité négative qui se trouve dans l'élément de conducteur ds' est au repos : la composante, suivant l'axe des x, de l'action qu'elle exerce sur l'unité d'électricité au repos, sera représentée par

$$-h'ds'\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx},$$

et nous aurons, par suite, en représentant par $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$ la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'unité d'électricité au repos :

$$(6)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'=\frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\left[-\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)}{ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\right]ds'.$$

Si nous intégrons cette équation pour un courant fermé, le premier terme du second membre donnera une valeur nulle, et il viendra

$$\mathfrak{X} = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \int \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\,ds',$$

ou bien

$$(7) \qquad \mathfrak{X} = -\frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{d}{dx}\int \frac{ds'}{r}.$$

On obtiendrait naturellement des expressions analogues pour les composantes suivant les deux autres axes.

L'intégrale précédente n'est pas nulle, et ses coefficients différentiels ne le sont généralement pas non plus. La loi de Riemann nous conduit donc au même résultat que celle de Weber, à savoir qu'un courant galvanique fermé, de même qu'un aimant, devrait exercer une action analogue à l'influence électrostatique, sur tout corps conducteur situé dans son voisinage. Et, comme ce résultat est en contradiction avec notre proposition expérimentale, nous pouvons dire également de la loi de Riemann *qu'elle est incompatible avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur fixe*.

§ IV. — *Expression des composantes de la force dans un système particulier de coordonnées.*

Cherchons maintenant à déduire, pour les composantes de l'action qu'une particule d'électricité e' en mouvement exerce sur une autre particule e aussi en mouvement, des expressions telles qu'elles donnent des résultats compatibles avec les proportions expérimentales, dans l'hypothèse qu'il n'y a qu'une seule électricité mobile dans le conducteur fixe.

Supposons que cette force dépende de la position mutuelle des particules, ainsi que des conditions de mouvement déterminées par les composantes de leur vitesse et de leur accélération; et formons, en conséquence, pour chacune des trois composantes suivant les axes, une expression générale qui dépende des coordonnées relatives de l'une

des particules par rapport à l'autre, et des coefficients différentiels du premier et du second ordre, par rapport au temps, des coordonnées des deux particules. Nous ferons entrer provisoirement dans cette expression tous les termes possibles jusqu'au second ordre inclusivement, en entendant par là tous ceux qui proviennent d'une double différentiation par rapport au temps, et qui renferment comme facteurs, ou un coefficient différentiel du second ordre, ou deux coefficients différentiels du premier ordre.

Choisissons un système particulier de coordonnées. Soit prise, pour l'un des axes, la droite qui unit les deux points où se trouvent les particules d'électricité au temps t, comptée comme positive dans le sens de e' vers e. Soient l et l' les coordonnées, suivant cet axe, des deux particules. Les deux autres axes peuvent être pris arbitrairement, pourvu qu'ils soient perpendiculaires entre eux et au premier. Si l'on représente, en général, par m, n, m', n' les coordonnées des deux particules suivant ces axes, on devra poser, au temps t,

$$m = n = m' = n' = 0.$$

D'après cela, les coordonnées relatives, suivant ces deux axes, $m - m'$ et $n - n'$, sont aussi nulles au temps t, et l'ordonnée relative suivant la première direction, $l - l'$, a seule une valeur assignable, qui est égale à la distance mutuelle des deux particules, et peut être, par suite, représentée par r, conformément à la notation précédente. Il résulte de là que, dans ce système de coordonnées, les fonctions des coordonnées relatives, qui entrent dans les expressions des composantes de la force, ne peuvent être fonctions que de r. Ce système de coordonnées offre encore l'avantage d'autres simplifications; on voit immédiatement, en effet, par la manière dont les coefficients différentiels entreront dans les termes de l'expression, que certains termes ne peuvent avoir aucune influence sur la composante cherchée et que certains couples de termes doivent avoir une influence égale.

Commençons par chercher la composante suivant l'axe des l; représentons-la par Lee', et formons l'expression qui détermine la quantité L.

Cette expression doit d'abord renfermer un terme qui est indépen-

dant des mouvements des particules, et qui représente la force électrostatique. Ce terme est parfaitement connu : c'est $\frac{1}{r^2}$.

Parmi les autres, considérons d'abord ceux qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e.

Ceux qui ne renferment qu'un seul coefficient différentiel du premier ordre seront en général de la forme

$$A\frac{dl}{dt},\quad A'\frac{dm}{dt},\quad A''\frac{dn}{dt},$$

dans laquelle A, A', A'' représentent des fonctions de r; mais, relativement aux derniers, nous pouvons tirer immédiatement l'une des conclusions annoncées plus haut : car le terme $A'\frac{dm}{dt}$ change de signe avec $\frac{dm}{dt}$. Or la direction positive de l'axe des m se comporte, relativement à un point situé sur l'axe des l, absolument de la même manière que la direction négative; et, par suite, dans le cas actuel, où les deux points se trouvent sur l'axe des l, il n'y a pas de raison pour qu'un mouvement dans un sens ait pour conséquence une autre force, suivant l'axe des l, qu'un mouvement dans l'autre sens. D'après cela, ce terme doit disparaître de l'expression, c'est-à-dire qu'on doit avoir $A' = 0$. On peut conclure de même que $A'' = 0$. Des trois termes précédents, il ne reste donc que $A\frac{dl}{dt}$.

La même chose peut se dire des trois termes

$$A_1\frac{d^2l}{dt^2},\quad A'_1\frac{d^2m}{dt^2},\quad A''_1\frac{d^2n}{dt^2},$$

dont les deux derniers doivent aussi disparaître, de sorte que le premier reste seul.

Enfin, pour ce qui regarde les termes qui renferment comme facteurs les produits de deux coefficients différentiels du premier ordre, égaux ou inégaux, et dans lesquels entre par conséquent l'un des carrés ou des produits suivants :

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2,\quad \left(\frac{dm}{dt}\right)^2,\quad \left(\frac{dn}{dt}\right)^2,\quad \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt},\quad \frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt},\quad \frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt},$$

on peut appliquer aux termes qui renferment les trois derniers produits ce qui vient d'être dit En effet, ces produits changent de signe avec $\frac{dm}{dt}$ et $\frac{dn}{dt}$, tandis que, dans la direction des m ou dans celle des n, le côté négatif se comporte, vis-à-vis des deux autres axes, absolument de la même manière que le côté positif. Des termes affectés de ces produits ne peuvent donc pas entrer dans l'expression. De plus, comme la position géométrique des axes des m et des n est la même, relativement à l'axe des l, les carrés $\left(\frac{dm}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$ doivent avoir le même coefficient. Les termes considérés fourniront une somme de la forme

$$A'_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3\left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right],$$

que nous transformons en

$$A_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right],$$

A_2 remplaçant la différence $A'_2 - A_3$. Mais, si nous désignons par v la vitesse de la particule e, nous aurons

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = v^2,$$

de sorte que la somme précédente pourra s'écrire

$$A_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2.$$

Si nous composons ensemble tous les termes qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e, et que nous en désignions la somme par L_1, il viendra

(8) $$L_1 = A\frac{dl}{dt} + A_1\frac{d^2 l}{dt^2} + A_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2.$$

De même, nous pourrons écrire, si nous désignons par L_2, la somme des termes qui ne renferment que des coefficients différentiels des

coordonnées de la particule e',

$$(9)\qquad L_2 = A_4 \frac{dl'}{dt} + A_5 \frac{d^2l'}{dt^2} + A_6 \left(\frac{dl'}{dt}\right)^2 + A_7 v'^2.$$

Il reste encore à considérer les termes qui renferment un produit de coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, c'est-à-dire un des produits suivants :

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt},\quad \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt},\quad \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt},$$

$$\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt},\quad \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt},\quad \frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt},\quad \frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt},\quad \frac{dm}{dt}\frac{dn'}{dt},\quad \frac{dm'}{dt}\frac{dn}{dt}.$$

Mais, de cette circonstance que les six derniers produits changent de signe avec $\frac{dm}{dt}$, $\frac{dm'}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dn'}{dt}$, on peut de nouveau conclure, comme plus haut, que les termes affectés de ces produits ne peuvent pas entrer dans l'expression des composantes de la force. Cette même conclusion n'est pas applicable au deuxième ni au troisième produit, quoique le changement de signe y ait lieu également; car, quand le coefficient différentiel $\frac{dm}{dt}$ change de signe, et que, par suite, la particule e change de direction dans son mouvement estimé suivant l'axe m, le nouveau mouvement se comporte à la vérité de la même manière que l'ancien, relativement à l'axe l, mais il se comporte autrement relativement au mouvement de la particule e', estimé suivant l'axe m et exprimé par $\frac{dm'}{dt}$. Si ces deux mouvements avaient lieu d'abord dans le même sens, ils ont lieu maintenant en sens contraire, et *vice versa*. Il n'est donc pas nécessaire que les coefficients de ces deux produits soient nuls, mais il faut qu'ils soient égaux entre eux, puisque les directions m et n ont la même position géométrique par rapport à l'axe l.

Si nous appelons L_3 la somme des termes qui renferment des coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, il résulte de ce qui précède que nous aurons

$$L_3 = A'_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right).$$

Nous allons procéder à la transformation de cette expression d'une

manière analogue à celle dont nous avons déjà fait usage. Nous écrirons

$$L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right),$$

en posant A_8 au lieu de $A'_8 - A_9$. Or, si ε désigne l'angle des directions des deux particules e et e', on a

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt} = vv' \cos\varepsilon,$$

et l'équation précédente s'écrira par suite

$$(10) \qquad L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 vv' \cos\varepsilon.$$

Nous venons de déterminer les différents groupes de termes dont la somme forme la quantité tout entière L, qui a pour expression

$$(11) \qquad L = \frac{1}{r^2} + L_1 + L_2 + L_3.$$

Nous pourrons traiter d'une manière analogue les composantes de la force suivant les axes m et n, composantes que nous représenterons par Mee' et Nee'; il n'est pas nécessaire que nous entrions de nouveau dans le détail du procédé, et il suffira d'écrire simplement les systèmes d'équations qui servent à la détermination de M et N. Ces systèmes sont

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} M_1 &= B \frac{dm}{dt} + B_1 \frac{d^2m}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt},\\ M_2 &= B_3 \frac{dm'}{dt} + B_4 \frac{d^2m'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt},\\ M_3 &= B_6 \frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt},\\ M &= M_1 + M_2 + M_3; \end{aligned}\right.$$

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} N_1 &= B \frac{dn}{dt} + B_1 \frac{d^2n}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt},\\ N_2 &= B_3 \frac{dn'}{dt} + B_4 \frac{d^2n'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt}\frac{dn'}{dt},\\ N_3 &= B_6 \frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt},\\ N &= N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned}\right.$$

§ V. — *Expression des composantes de la force pour un système quelconque de coordonnées.*

Ayant exprimé les trois composantes de la force dans un système particulier de coordonnées, il nous sera facile de les exprimer dans un système quelconque.

Considérons un système d'axes rectangulaires, dans lequel les deux particules d'électricité ont les coordonnées x, y, z et x', y', z'. Représentons par $\mathrm{X}ee'$, $\mathrm{Y}ee'$, $\mathrm{Z}ee'$ les composantes, suivant les axes, de l'action que la particule e' exerce sur la particule e; il s'agit de déterminer les quantités X, Y, Z.

Pour exprimer X, désignons par (lx), (mx), (nx) les angles que l'axe des x fait avec les axes primitifs des l, m et n; nous aurons alors

$$(14)\qquad \mathrm{X} = \mathrm{L}\cos(lx) + \mathrm{M}\cos(mx) + \mathrm{N}\cos(nx).$$

Mais on peut aussi exprimer les différentes parties constituantes de X, au moyen des parties correspondantes de L, M et N. Si l'on représente par X_1 la somme des termes de X, qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de e; par X_2 la somme de ceux qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de e'; par X_3 la somme de ceux qui renferment des produits des coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, X_1 sera donné par l'équation

$$(15)\qquad \mathrm{X}_1 = \mathrm{L}_1\cos(lx) + \mathrm{M}_1\cos(mx) + \mathrm{N}_1\cos(nx),$$

et l'on aura des équations analogues pour X_2 et X_3.

Si l'on remplace, dans l'équation précédente, L_1, M_1 et N_1 par leurs valeurs données dans (8), (12) et (13), et si l'on tient compte, dans l'addition, des relations

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dl}{dt}\cos(lx) + \left(\frac{dm}{dt}\right)\cos(mx) + \frac{dn}{dt}\cos(nx) = \frac{dx}{dt},\\ &\frac{d^2l}{dt^2}\cos(lx) + \frac{d^2m}{dt^2}\cos(mx) + \frac{d^2n}{dt^2}\cos(nx) = \frac{d^2x}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

il viendra

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 = {} & B\frac{dr}{dt} + B_1\frac{d^2x}{dt^2} + B_2\frac{dl}{dt}\frac{dx}{dt} \\ & + \left[(A - B)\frac{dl}{dt} + (A_1 - B_1)\frac{d^2l}{dt^2} \right. \\ & \qquad \left. + (A_2 - B_2)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2\right]\cos(lx). \end{aligned}\right.$$

Nous substituerons à $\cos(lx)$ sa valeur $\frac{x - x'}{r}$, en multipliant par $\frac{1}{r}$ tous les termes de la parenthèse carrée, et laissant $x - x'$ en facteur commun.

En outre, nous introduirons, au lieu des coefficients différentiels de l, ceux de r. Nous avons déjà dit plus haut que la distance mutuelle, au temps t, des particules e et e' est simplement représentée par la différence $l - l'$, parce qu'à cet instant les coordonnées m, n, m' et n' sont nulles. Mais, pour différentier r, on doit partir de l'expression générale

$$r = \sqrt{(l - l')^2 + (m - m')^2 + (n - n')^2},$$

et ce n'est qu'après la différentiation qu'on peut faire

$$m - m' = n - n' = 0.$$

Il y a encore à observer, relativement à cette différentiation, que les coordonnées l, m et n ne varient que par le mouvement de la particule e; l', m', n' par celui de la particule e', tandis que r varie par le mouvement des deux particules. On pourra distinguer les variations de r qui correspondent à ces deux mouvements en particulier, en regardant r comme fonction des deux arcs des trajectoires s et s', et ceux-ci mêmes comme fonctions de t. Les différentiations qui ne se rapportent qu'au mouvement de la particule e pourront alors s'effectuer comme il suit :

$$\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}\left[(l - l')\frac{dl}{dt} + (m - m')\frac{dm}{dt} + (n - n')\frac{dn}{dt}\right],$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = {} & -\frac{1}{r^3}\left[(l - l')\frac{dl}{dt} + (m - m')\frac{dm}{dt} + (n - n')\frac{dn}{dt}\right]^2 \\ & + \frac{1}{r}\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right] \\ & + \frac{1}{r}\left[(l - l')\frac{d^2l}{dt^2} + (m - m')\frac{d^2m}{dt^2} + (n - n')\frac{d^2n}{dt^2}\right]. \end{aligned}$$

Posant, dans ces équations, $m - m' = n - n' = 0$ et $l - l' = r$, et, en même temps,

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

on obtiendra, pour les coefficients différentiels de l, les expressions suivantes :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}, \tag{18}$$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \left[\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{1}{r}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2}, \tag{19}$$

Substituons ces expressions dans (17), en y remplaçant v^2 par $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ pour l'uniformité, et désignons, pour abréger, par C, C_1, C_2, C_3 les fonctions de r qui se trouvent entre parenthèses carrées dans cette équation, elle deviendra ainsi

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 = {} & B\frac{dx}{dt} + B_1\frac{d^2 x}{dt^2} + B_2\frac{dr}{ds}\frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt} \\ & + \left\{ C\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} + \left[C_1\frac{d^2 r}{ds^2} + C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + C_3\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right. \\ & \left. \qquad + C_1\frac{dr}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2}\right\}(x - x'). \end{aligned}\right.$$

On obtiendra de même

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} X_2 = {} & B_3\frac{dx'}{dt} + B_4\frac{d^2 x'}{dt^2} + B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ & + \left\{ C_4\frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \left[C_5\frac{d^2 r}{ds'^2} + C_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + C_7\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \right. \\ & \left. \qquad + C_5\frac{dr}{ds'}\frac{d^2 s'}{dt^2}\right\}(x - x'). \end{aligned}\right.$$

Il reste encore à déterminer les quantités X_3; on devra, pour cela, remplacer, dans l'équation

$$X_3 = L_3\cos(lx) + M_3\cos(mx) + N_3\cos(nx),$$

L_3, M_3 et N_3 par leurs valeurs (10), (12) et (13). Mais si, dans l'ad-

dition, on a égard à la première des équations (16), il viendra

$$X_3 = B_6 \frac{dl}{dt}\frac{dx'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt}\frac{dx}{dt} + \left[(A_8 - B_6 - B_7)\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 vv' \cos\varepsilon\right] \cos(lx),$$

équation qui, conformément à ce qu'on a vu plus haut, peut s'écrire

$$(22) \quad \begin{cases} X_3 = B_6 \dfrac{dr}{ds}\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{ds}{dt} + B_7 \dfrac{dr}{ds'}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{ds'}{dt} \\ \quad + \left(C_8 \dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{ds'} + C_9 \cos\varepsilon\right)(x - x')\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}. \end{cases}$$

Les quantités X_1, X_2, X_3 étant connues, on obtiendra X par l'équation

$$(23) \quad X = \frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3.$$

On pourra naturellement représenter de même les quantités Y et Z; on n'aura, pour cela, qu'à changer, dans les équations précédentes, les quantités qui se rapportent à l'axe des x en celles qui se rapportent aux axes des y et des z, sans rien modifier à celles qui se rapportent à r.

Il s'agit actuellement de déterminer les fonctions de r, qui entrent dans les équations (20), (21) et (22), et qui sont, jusqu'à présent, indéterminées.

§ VI. — *Détermination des fonctions qui entrent dans* X_2.

Pour déterminer, tout d'abord, partiellement les fonctions qui entrent dans l'expression de X_2, nous ferons usage de la proposition qui a déjà été employée dans les §§ II et III, savoir : qu'*un courant quelconque fermé et constant dans un conducteur fixe n'exerce aucune force motrice sur l'électricité au repos*.

Imaginons donc, comme au § II, une unité d'électricité positive au repos, au point x, y, z, et, au point x', y', z', un élément de courant

ds', qui se compose de la quantité $h'ds'$ d'électricité positive en mouvement, et de la quantité $h'ds'$ d'électricité négative au repos. Ces deux quantités d'électricité exercent sur l'unité d'électricité au repos des actions dont les composantes, suivant l'axe des x, sont

$$h'ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+\mathrm{X}_2\right) \quad \text{et} \quad -h'ds'\frac{x-x'}{r^3}.$$

La somme de ces composantes est la composante, suivant le même axe, de l'action exercée, par l'élément du courant, sur l'unité d'électricité, composante que nous représenterons, comme plus haut, par $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$. Nous aurons donc

$$\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = h'ds'\mathrm{X}_2,$$

expression dans laquelle nous devrons remplacer X_2 par sa valeur (21). Mais en même temps nous écrirons, au lieu de

$$\frac{dx'}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x'}{dt^2},$$

les expressions équivalentes

$$\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

et nous pourrons faire $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$, à cause de l'hypothèse que le courant est constant. Nous obtiendrons ainsi

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = h'ds'\Bigg(&\left[\mathrm{B}_3\frac{dx'}{ds'}+\mathrm{C}_4(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{ds'}{dt} \\ &+\left\{\mathrm{B}_4\frac{d^2x'}{ds'^2}+\mathrm{B}_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{ds'}\right. \\ &\left.+\left[\mathrm{C}_5\frac{d^2r}{ds'^2}+\mathrm{C}_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+\mathrm{C}_7\right](x-x')\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\Bigg).\end{aligned}\right.$$

Cette expression, intégrée pour un courant fermé quelconque, doit donner une valeur nulle, d'après la proposition précédente. Mais, si l'intégrale de l'expression complète doit être nulle, quelle que soit

l'intensité du courant, il faut que les intégrales des termes multipliés par $\frac{ds'}{dt}$ et par $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ soient nulles séparément. Les expressions entre parenthèses qui forment ces termes doivent, d'après cela, être des coefficients différentiels complets par rapport à s', sans qu'il soit nécessaire d'admettre une relation particulière entre r et x'.

Pour que la première expression soit une différentielle complète par rapport à s', il faut, comme on le voit immédiatement à l'inspection de sa forme, qu'elle soit égale à

$$-\frac{d}{ds'}[B_3(x-x')];$$

et pour cela il est nécessaire que l'équation

$$(25)\qquad C_4 = -\frac{dB_3}{dr}$$

soit vérifiée.

De même, si l'on considère les termes de la seconde expression qui renferment des coefficients différentiels du deuxième ordre, on voit immédiatement qu'elle doit être identiquement égale au coefficient différentiel suivant :

$$\frac{d}{ds'}\left[B_4\frac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right];$$

et, pour que cette condition soit remplie, il faut que les équations

$$(26)\qquad \begin{cases} B_5 = \dfrac{dB_4}{dr} - C_5, \\ C_6 = \dfrac{dC_5}{dr}, \\ C_7 = 0 \end{cases}$$

se vérifient.

De cette manière, les sept fonctions indéterminées qui entrent dans l'équation (21) se réduisent à trois, et cette équation peut s'écrire

$$(27)\qquad \begin{cases} X_2 = -\dfrac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\dfrac{ds'}{dt} + \dfrac{d}{ds'}\left[B_4\dfrac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\dfrac{dr}{ds'}\right]\left(\dfrac{ds'}{dt}\right)^2 \\ \qquad + \left[B_4\dfrac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\dfrac{dr}{ds'}\right]\dfrac{d^2s'}{dt^2}. \end{cases}$$

§ VII. — *Détermination des fonctions qui entrent dans* X_1.

Pour traiter la quantité X_1, nous pouvons faire usage d'une proposition expérimentale analogue à la précédente, savoir : qu'*une quantité d'électricité en repos n'exerce aucune action sur un courant quelconque fermé et constant qui se meut dans un conducteur en repos.*

Cette proposition a besoin de quelque éclaircissement. Lorsque de l'électricité d'une certaine espèce, par exemple de l'électricité positive, se trouve accumulée en un lieu, celle-ci exerce par influence une action électrostatique sur tout corps conducteur placé dans son voisinage, et le conducteur du courant galvanique doit naturellement aussi subir cette action. La proposition précédente exprime seulement qu'en dehors de cette action il n'en subit pas encore une autre, occasionnée par ce courant, et dépendant, par suite, de l'intensité de celui-ci. Il faut encore remarquer, à ce sujet, que, si un courant galvanique fermé subissait une semblable action, un aimant devrait la subir aussi. Mais on a toujours observé que l'électricité au repos agit, sur un aimant au repos, de la même manière seulement que sur un morceau de métal non magnétique de la même grandeur et de la même forme. On n'hésitera donc pas à considérer la proposition précédente comme bien établie par l'expérience.

Pour l'appliquer, imaginons, au point x', y', z', une unité d'électricité en repos, et au point x, y, z un élément de courant ds, qui renferme la quantité d'électricité en mouvement $h\,ds$, et la quantité d'électricité en repos $-h\,ds$. Les composantes, suivant l'axe des x, des actions que ces deux électricités subissent de la part de l'unité d'électricité au repos sont

$$h\,ds\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right) \quad \text{et} \quad -h\,ds\,\frac{x-x'}{r^3}.$$

D'après cela, la composante de l'action que l'élément de courant subit de la part de l'unité d'électricité sera représentée par le produit $h\,ds\,X_1$, dans lequel nous aurons à remplacer X_1 par l'expression (20).

Et si, en même temps, nous écrivons de nouveau, au lieu de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$,

$$\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

et que nous posions $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, puisque le courant doit être constant, cette expression deviendra

$$h\,ds\left(\left[B\frac{dx}{ds} + C(x-x')\frac{dr}{ds}\right]\frac{ds}{dt} + \left\{B_1\frac{d^2r}{ds^2} + B_2\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds} + \left[C_1\frac{d^2r}{ds^2} + C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + C_3\right](x-x')\right\}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right).$$

De là nous pouvons tirer des conclusions tout à fait analogues à celles du paragraphe précédent. En effet, si l'unité d'électricité ne doit exercer, sur le courant tout entier, aucune action dirigée dans le sens de l'axe des x, l'intégrale de cette expression, étendue à tout le courant, doit être nulle, et l'on en conclut les équations suivantes, analogues à celles (25) et (26), qui précèdent,

$$(28) \qquad C = \frac{dB}{dr}, \quad B_2 = \frac{dB_1}{dr} + C_1, \quad C_2 = \frac{dC_1}{dr}, \quad C_3 = 0.$$

En outre, on peut tirer d'autres conclusions dans le cas actuel. La proposition, en effet, ne dit pas seulement que l'unité d'électricité ne tend à mouvoir le courant dans aucune direction, mais encore qu'elle ne tend à le faire tourner autour d'aucun axe, et de là on peut encore déduire certaines équations.

Comme le choix de l'axe est arbitraire, nous prendrons pour tel la droite menée par le point x', y', z', parallèlement à l'axe des z. Déterminons le moment de rotation autour de cet axe. L'expression précédente de la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds subit de la part de l'unité d'électricité, peut se mettre, en vertu des équations (28), sous la forme

$$h\,ds\frac{dP}{ds},$$

dans laquelle P est une quantité déterminée par l'équation suivante :

$$(29)\qquad P = B(x - x')\frac{ds}{dt} + \left[B_1\frac{dx}{ds} + C_1(x - x')\frac{dr}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

De même on a, pour la composante de cette force suivant l'axe des y, l'expression

$$h\,ds\frac{dQ}{ds},$$

dans laquelle Q est déterminé par l'équation

$$(30)\qquad Q = B(y - y')\frac{ds}{dt} + \left[B_1\frac{dy}{ds} + C_1(y - y')\frac{dr}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

De là résulte, pour le moment de cette force autour de l'axe considéré, l'expression

$$h\left[(x - x')\frac{dQ}{ds} - (y - y')\frac{dP}{ds}\right]ds.$$

Or, si l'unité d'électricité en repos ne tend pas à faire tourner un courant fermé, l'intégrale de cette expression doit être nulle pour tout courant fermé; mais cette expression peut s'écrire

$$h\frac{d}{ds}[(x - x')Q - (y - y')P]\,ds - h\left(Q\frac{dx}{ds} - P\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

et, comme le premier terme est une différentielle exacte, qui donnera une valeur nulle par l'intégration, il faut que le second donne aussi une valeur nulle. Celui-ci, si l'on y remplace P et Q par leurs valeurs (29) et (30), prend la forme

$$h\left[(x - x')\frac{dy}{ds} - (y - y')\frac{dx}{ds}\right]\left[B\frac{ds}{dt} + C_1\frac{dr}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]ds,$$

et l'on voit immédiatement que cette expression n'est pas une différentielle exacte, et que, par suite, son intégrale ne peut être nulle, pour tout courant fermé, que si le second facteur entre parenthèses carrées devient lui-même nul; mais, pour qu'il en soit ainsi, indépendamment

de l'intensité du courant, il faut que

$$(31) \qquad B = 0 \quad \text{et} \quad C_1 = 0.$$

Si l'on combine ces équations avec celles données sous le numéro (28), ces dernières deviendront

$$(32) \qquad C = 0, \quad B_2 = \frac{dB_1}{dr}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0.$$

De cette manière, les sept fonctions indéterminées qui entrent dans X_1 se réduisent à une seule, et l'équation (20) se transforme en

$$(33) \qquad X_1 = \frac{d}{ds}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

§ VIII. — *Détermination des fonctions qui entrent dans* X_3.

Pour déterminer les fonctions qui entrent dans l'expression de X_3, nous considérons l'action mutuelle de deux courants qui ont lieu dans des conducteurs en repos.

Soient, aux points x, y, z, et x', y', z', deux éléments de courant ds et ds', qui renferment les quantités d'électricité en mouvement hds et $h'ds'$, et les quantités d'électricité en repos $-hds$ et $-h'ds'$. Pour déterminer l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds, nous avons à considérer les actions que la quantité d'électricité hds subit de la part de $h'ds'$ et de $-h'ds'$, et celles que la quantité d'électricité $-hds$ subit également de la part de celles-ci. Les composantes, suivant l'axe des x, de ces quatre forces, sont

$$hh'ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3\right),$$

$$-\,hh'ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3} + X_1\right),$$

$$-\,hh'ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3} + X_2\right),$$

$$hh'ds\,ds'\,\frac{x-x'}{r^3}.$$

Leur somme donne, pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds, le produit

$$hh'\,ds\,ds'\,X_3,$$

dans lequel X_3 doit être remplacé par sa valeur (22).

Mais, auparavant, nous donnerons à cette dernière une forme plus commode pour l'intégration. Nous pouvons remplacer la quantité $\cos\varepsilon$, qui y entre, par un coefficient différentiel. De l'égalité

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

on tire, en effet, par une double différentiation,

$$(34) \qquad \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} = -2\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

ou, comme l'expression entre parenthèses n'est autre que $\cos\varepsilon$,

$$(35) \qquad \cos\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}.$$

Si nous remplaçons $\cos\varepsilon$ par cette valeur, et, en même temps, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ par $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$, $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{ds'}{dt}$, comme dans les paragraphes précédents, l'équation (22) s'écrira

$$(36) \qquad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \left[C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{1}{2}C_9\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right](x-x')\right\}.$$

Il s'agit d'en faire disparaître le produit $C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$.

Dans ce but, introduisons une fonction E de r, liée à C_8 par la relation

$$E = \int r\,dr \int \frac{C_8}{r}\,dr,$$

de laquelle résultent

$$\frac{1}{r}\frac{dE}{dr} = \int \frac{C_8}{r}\,dr \quad \text{et} \quad r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right) = C_8.$$

Si nous différentions cette fonction E par rapport à s et s', nous pourrons donner à ses coefficients différentiels les formes suivantes :

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d(r^2)}{ds},$$

$$\frac{d^2E}{ds\,ds'} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right)\frac{dr}{ds'}\frac{d(r^2)}{ds}$$
$$= \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},$$

et nous obtiendrons par là

$$C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = -\frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2E}{ds\,ds'}.$$

Si l'on remplace cette valeur de $C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$ dans l'équation (36), et que l'on dénote, pour abréger, par E_1 l'expression

$$-\frac{1}{2}\left(C_9 + \frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right),$$

il viendra

$$(37)\quad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \left[E_1\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2E}{ds\,ds'}\right](x - x')\right\}.$$

En outre, on peut poser

$$\frac{d^2E}{ds\,ds'}(x - x') = \frac{d^2[E(x - x')]}{ds\,ds'} + \frac{dE}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dE}{ds'}\frac{dx}{ds};$$

et si l'on écrit, pour abréger,

$$B_6 + \frac{dE}{dr} = E_2, \quad B_7 - \frac{dE}{dr} = E_3,$$

l'équation (37) deviendra

$$(38)\ X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{E_1(x - x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x - x')]}{ds\,ds'}\right\}.$$

Nous aurons à multiplier cette expression, ainsi transformée, de X_3

par $hh'dsds'$, pour obtenir la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds.

Si, pour obtenir la composante, suivant cet axe, de l'action que le courant s' tout entier, supposé fermé, exerce sur ds, on effectue l'intégration par rapport à s', il se présentera quelques simplifications. Le dernier terme de l'expression précédente est, en effet, un coefficient différentiel par rapport à s'; l'avant-dernier renferme le facteur $\frac{dx}{ds}$, indépendant de s', et qui peut être regardé comme constant dans l'intégration, et son autre facteur $E_3\frac{dr}{ds'}$ est de nouveau un coefficient différentiel par rapport à s'. Ces deux termes donnent donc une valeur nulle, lorsqu'on intègre relativement à un circuit fermé, et il reste

$$(39)\quad hh'ds\int X_3\,ds' = hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds'.$$

Si l'on intègre encore cette expression par rapport à s, on aura la force avec laquelle le courant s' tend à écarter le courant s tout entier dans le sens de l'axe x. Cette intégration fait de nouveau disparaître un terme dans le cas où le courant s est aussi fermé. Dans le terme $E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}$, le facteur $\frac{dx'}{ds'}$ est, en effet, indépendant de s, et l'autre facteur $E_2\frac{dr}{ds}$, étant un coefficient différentiel par rapport à s, donne un résultat nul, par l'intégration. On a donc

$$(40)\qquad hh'\int\int X_3\,ds\,ds' = hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\int E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}ds\,ds'.$$

Nous pourrons comparer ce résultat avec une conséquence parfaitement établie de la théorie d'Ampère, puique cette théorie peut être considérée comme tout à fait irréprochable, en tant qu'elle se rapporte aux actions exercées par des courants fermés les uns sur les autres. Or, d'après cette théorie, la force avec laquelle un courant fermé s' tend à mouvoir un autre courant fermé s, dans le sens de l'axe des x, est donnée par l'expression

$$-kii'\int\int\frac{x-x'}{r^2}\cos\varepsilon\,ds\,ds',$$

dans laquelle i et i' sont les intensités des deux courants, et k une constante. Si l'on remplace, dans cette expression, i et i' par $h\frac{ds}{dt}$ et $h'\frac{ds'}{dt}$, et $\cos\varepsilon$ par $-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}$, conformément à l'identité (35), elle prendra la forme

$$hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\int\frac{k}{2r^3}(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\,ds\,ds'$$

et, en la comparant avec l'expression (40), on voit qu'il faut que

$$(41) \qquad E_1 = \frac{k}{2r^3}.$$

Pour déterminer encore l'autre fonction E_2, qui entre dans (39), nous ferons usage de cette proposition, bien établie par l'expérience, savoir qu'*un courant galvanique fermé et constant, qui a lieu dans un conducteur en repos, ne tend pas à modifier, en intensité, un autre courant galvanique fermé qui a lieu dans un conducteur en repos.*

L'expression (39), qui, après la substitution de la valeur trouvée pour E_1, s'écrit

$$hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+E_2\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds',$$

représente, d'après ce que nous avons vu, la composante, suivant l'axe des x, de l'action que le courant fermé s' exerce sur l'élément de courant ds, c'est-à-dire sur les deux quantités d'électricité $h\,ds$ et $-h\,ds$ qui se trouvent dans l'élément de conducteur ds. Or la quantité d'électricité négative $-h\,ds$ est en repos; et, d'après la proposition dont il a été fait usage au § VI, le courant galvanique fermé ne peut exercer aucune action sur l'électricité en repos. D'après cela, l'expression précédente peut aussi s'entendre en ce sens qu'elle représente la composante, suivant l'axe des x, de l'action *que le courant fermé s' exerce sur la quantité d'électricité $h\,ds$ qui se trouve dans l'élément de conducteur ds.*

Pour pouvoir représenter également, d'une manière commode, la composante de cette force qui est dirigée suivant l'élément ds, et qui tend, par suite, à augmenter l'intensité du courant, nous donnerons

une forme un peu différente à notre expression. De l'égalité

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

on tire

$$(42) \quad \begin{cases} \dfrac{d(r^2)}{dx} = 2(x - x'), \\ \dfrac{d^2(r^2)}{dx\,ds'} = -2\dfrac{dx'}{ds'}. \end{cases}$$

Éliminant $x - x'$ et $\frac{dx'}{ds'}$ de l'expression précédente, au moyen de ces relations, en écrivant $\frac{1}{2r}\frac{d(r^2)}{ds}$ au lieu de $\frac{dr}{ds}$, celle-ci devient :

$$\frac{1}{4}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k}{r^3}\frac{d(r^2)}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} - \frac{E_2}{r}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\right]ds'.$$

Pour obtenir maintenant, au lieu de la composante de la force suivant l'axe arbitraire des x, la composante dirigée suivant l'élément ds, il suffira de remplacer les coefficients différentiels par rapport à x par les coefficients correspondants relatifs à s, et l'on aura

$$\frac{1}{4}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k}{r^3}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} - \frac{E_2}{r}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right]ds',$$

ou, plus simplement,

$$\frac{1}{8}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r}\right)\frac{d}{ds'}\left[\frac{d(r^2)}{ds}\right]^2 ds'.$$

Cette expression représente la force qui agit, dans un seul élément ds, dans le sens de l'accroissement de l'intensité du courant. Pour que celle-ci reste constante, il faut que l'intégrale de cette expression, étendue à tout le circuit fermé s, soit nulle. L'intégrale relative à s',

$$\int\left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r}\right)\frac{d}{ds'}\left[\frac{d(r^2)}{ds}\right]^2 ds',$$

qui entre déjà dans l'expression, et qui multiplie l'élément ds, doit donc, ou bien être un coefficient différentiel par rapport à s, ou bien

être nulle. Et, comme la première de ces conditions ne peut être remplie par aucune forme de la fonction E_2 de r, on devra déterminer cette dernière de telle sorte que l'intégrale soit nulle, ce qui exige qu'on ait

$$\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} = c,$$

c désignant une constante; car ce n'est qu'à cette condition que la quantité sous le signe intégral est une différentielle exacte, et que l'intégrale peut, par suite, être nulle pour tout circuit fermé.

De cette relation, il résulte

$$E_2 = \frac{k}{r^2} - cr;$$

mais, comme le terme $-cr$ donnerait, dans l'expression de X_3, un terme qui croîtrait en même temps que r, et qu'un pareil terme ne peut entrer dans l'expression de la composante de la force, la constante c doit être nulle, et l'on obtient ainsi pour E_2 l'expression

$$(43) \qquad E_2 = \frac{k}{r^2}.$$

Des quatre fonctions indéterminées de r, qui entraient dans l'expression (38) de X_3, il y en a donc deux qui sont déterminées; et, si on les remplace par leurs valeurs dans l'équation (38), celle-ci devient

$$(44) \quad X_3 = \left\{ \frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{k}{r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{dr}{ds'} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'} \right\} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

§ IX. — *Application des lois relatives à l'induction.*

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des courants constants dans des conducteurs au repos; nous allons maintenant laisser de côté la restriction relative à la constance du courant, et supposer, en outre, que le conducteur s se meuve. Pour plus de simplicité, nous supposerons toutefois que le conducteur ne change pas de forme, et qu'il se meut seulement parallèlement à lui-même, de sorte que tous ses élé-

ments parcourent, pendant l'élément de temps dt, un même élément de chemin $d\sigma$ dans une même direction.

Dans ce cas, chaque particule d'électricité positive, qui se trouve dans le conducteur s, est animée à la fois de deux mouvements, celui qu'elle a dans le conducteur, et dont la vitesse est $\frac{ds}{dt}$, et celui du conducteur lui-même, dont la vitesse est $\frac{d\sigma}{dt}$. Il s'ensuit que les coefficients différentiels, par rapport au temps, qui sont relatifs au mouvement de cette particule d'électricité, doivent maintenant être exprimés autrement que nous ne l'avons fait plus haut. Au lieu d'une expression de la forme

$$\frac{dU}{ds}\frac{ds}{dt},$$

dans laquelle U désigne une quantité qui dépend de la position de la particule d'électricité, nous aurons à poser

$$\frac{dU}{ds}\frac{ds}{dt}+\frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt};$$

et, au lieu d'une expression de la forme

$$\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{ds}\right)\left(\frac{ds}{\partial t}\right)^2+V\frac{dU}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

dans laquelle V désigne une seconde quantité qui dépend de la position de la particule d'électricité, nous devons poser

$$\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left[\frac{d}{d\sigma}\left(V\frac{dU}{ds}\right)+\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{d\sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{d}{d\sigma}\left(V\frac{dU}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right)$$
$$+V\frac{dU}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}+V\frac{dU}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Si nous cherchons à déterminer la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la particule d'électricité positive $h'ds'$, qui se trouve en ds', exerce sur la particule d'électricité positive hds, qui se trouve en ds, nous aurons à former, comme plus haut, pour exprimer cette

composante, l'expression générale

$$hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1+X_2+X_3\right),$$

dans laquelle X_1, X_2 et X_3 devront être remplacés par les expressions (33), (27) et (44), après que nous y aurons fait les modifications que nous venons d'indiquer, ce qui donnera

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 = {} & \frac{d}{ds}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left[\frac{d}{d\sigma}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)+\frac{d}{ds}\left(B_1\frac{dx}{d\sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt}\\ & +\frac{d}{d\sigma}\left(B_1\frac{dx}{d\sigma}\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2+B_1\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}+B_1\frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} X_2 = {} & -\frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds'}\left[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\ & +\left[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{d^2s'}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} X_3 = {} & \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\\ & +\left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{d^2[E(x-x')]}{d\sigma\,ds'}\right\}\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Si nous cherchons, en outre, à déterminer la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la particule d'électricité négative $-h'ds'$, qui se trouve en ds', exerce sur la particule d'électricité positive $h\,ds$, qui se trouve en ds, nous n'aurons qu'à remplacer, dans l'expression précédente, $h'ds'$ par $-h'ds'$, et à faire en outre $\frac{ds'}{dt}=0$, puisque l'électricité négative qui se trouve en ds' est en repos. On trouvera ainsi $X_2=0$ et $X_3=0$, tandis que X_1 ne changera pas. L'expression de cette composante se réduit donc à

$$-hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right).$$

De là résulte, pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la quantité d'électricité positive $h\,ds$, qui se trouve en ds, subit de la part de l'élément de courant ds', c'est-à-dire des deux quantités d'élec-

tricité $h'ds'$ et $-h'ds'$ à la fois, l'expression

$$hh'\,ds\,ds'(\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3).$$

Si l'on intègre cette expression par rapport à s', on aura la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la quantité d'électricité positive hds, qui se trouve en ds, subit de la part du courant s' tout entier; et, si nous représentons cette composante par $\mathfrak{X}hds$, nous aurons donc l'égalité

$$\mathfrak{X}=h'\int(\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)\,ds', \tag{48}$$

dans laquelle on devra substituer à X_2 et X_3 leurs expressions (46) et (47). Si l'on effectue l'intégration, tous les termes de ces expressions, qui ont la forme de coefficients différentiels par rapport à ds', donneront zéro, et peuvent, par conséquent, être supprimés; on aura ainsi

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{X}=h'\frac{d^2s'}{dt^2}&\int\left[\mathrm{B}_4\frac{dx'}{ds'}+\mathrm{C}_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]ds'\\&+kh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[\frac{x-x'}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds'\\&+kh'\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[\frac{x-x'}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'}\right]ds'.\end{aligned}\right. \tag{49}$$

On peut transformer cette égalité au moyen des équations

$$x-x'=r\frac{dr}{dx}\quad\text{et}\quad\frac{dx'}{ds'}=-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'},$$

données au paragraphe précédent; elle devient alors

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{X}=\frac{1}{2}h'\frac{d^2s'}{dt^2}&\int\left[-\mathrm{B}_4\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}+\mathrm{C}_5\frac{dr}{dx}\frac{d(r^2)}{ds'}\right]ds'\\&+\frac{1}{2}kh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\right]ds'\\&+\frac{1}{2}kh'\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\right]ds'.\end{aligned}\right. \tag{50}$$

Pour déduire de cette expression, relative à la direction x, l'expression correspondante relative à la direction de l'élément ds, nous n'aurons de nouveau qu'à changer les coefficients différentiels par rapport à x en ceux par rapport à s. Alors les deux termes qui figurent dans la seconde intégrale se détruisent, et nous obtenons, en désignant par $\mathfrak{S}hds$ la composante, suivant la direction de l'élément ds, de l'action que la quantité d'électricité hds subit de la part du courant s', l'égalité

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{1}{2}h'\frac{d^2s'}{dt^2}\int\left[-B_4\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+C_5\frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'}\right]ds' \\ &\quad+\frac{1}{2}kh'\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right]ds'. \end{aligned}\right.$$

Le produit $\mathfrak{S}ds$ est ce qu'on appelle la *force électromotrice induite* dans l'élément de conducteur ds, et, par suite, l'intégrale $\int\mathfrak{S}ds$ est la force électromotrice induite dans le courant s tout entier.

L'intégration, effectuée par rapport à s, fait de nouveau disparaître un terme. Si nous considérons en effet l'intégrale double

$$\int\int\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}\,ds\,ds',$$

il est à remarquer que la quantité

$$\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}=-2\left(\frac{dx}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{d\sigma}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{d\sigma}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

que nous pouvons également représenter par $-2\cos(\sigma s')$, si $(\sigma s')$ désigne l'angle compris entre l'élément de chemin $d\sigma$, parcouru par ds, et l'élément de courant ds' est indépendant de s, puisque le conducteur s se meut tout entier parallèlement à lui-même, et que tous ses éléments se meuvent, par suite, dans la même direction. On peut donc écrire l'intégrale précédente sous la forme

$$\int ds'\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}\int\frac{d\frac{1}{r}}{ds}ds.$$

L'intégration relative à s s'effectue ici immédiatement, et donne un résultat nul pour un courant fermé.

Considérons maintenant l'autre intégrale double

$$\int\int \frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds';$$

puisque le coefficient différentiel $\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}$, qui, en vertu de l'équation (35), est égal à $-2\cos\varepsilon$, ne varie pas pendant le mouvement du conducteur s, et, par suite, est indépendant de σ, nous pourrons poser

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} = \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right],$$

et puisqu'en outre la quantité σ, par rapport à laquelle la différentiation doit être effectuée, est indépendante des quantités s et s', par rapport auxquelles nous aurons à intégrer toute l'expression, nous pourrons effectuer la différentiation en dehors du signe intégral, et écrire, au lieu de l'intégrale double qui précède,

$$\frac{d}{d\sigma}\int\int \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds'.$$

Nous aurons donc, pour déterminer la force électromotrice induite dans le conducteur s, l'équation

$$(52)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \mathfrak{S}\,ds = \tfrac{1}{2}k' \frac{d^2 s'}{dt^2}\int\int\left[-B_4 \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + C_5 \frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'}\right] ds\,ds' \\ \displaystyle\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}kh' \frac{ds'}{dt}\frac{d\sigma}{dt}\frac{d}{d\sigma}\int\int \frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds'. \end{cases}$$

Nous allons maintenant appliquer à cette équation la proposition suivante : *Si le conducteur s s'arrête dans une position déterminée, dans le voisinage du conducteur s', et que l'intensité du courant croisse, dans ce dernier, depuis zéro jusqu'à une valeur déterminée, ou*

bien si l'intensité du courant en s' a constamment cette valeur, et que s s'en rapproche jusqu'à cette même position, à partir d'un point infiniment éloigné, dans ces deux cas il se produit en s une égale force d'induction.

Pour déterminer la force d'induction qui se produit pendant un certain temps, nous avons à multiplier par dt l'expression de la force électromotrice, et à intégrer entre les limites de l'intervalle de temps donné. Dans le premier des deux cas énoncés plus haut, $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, de sorte que le second terme de l'expression (52) disparaît; dans le premier terme, l'intégrale double est indépendante du temps, et le coefficient différentiel $\frac{d^2 s'}{dt^2}$, dont ce terme est affecté comme facteur, doit seul être intégré par rapport à t, et donne $\frac{ds'}{dt}$. La force d'induction qui se produit dans ce cas est donc

$$\tfrac{1}{2} h' \frac{ds'}{dt} \int\int \left[- B_4 \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + C_5 \frac{dr}{ds} \frac{d(r^2)}{ds'} \right] ds\,ds'.$$

Dans le second cas, $\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0$, de sorte que le premier terme de l'expression disparaît; le second s'intègre immédiatement par rapport à t, et donne

$$\tfrac{1}{2} kh' \frac{ds'}{dt} \int\int \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds'.$$

Ces deux quantités devant être égales, en vertu de la proposition précédente, leur différence sera nulle, et l'on aura, par suite

$$(53) \qquad \int\int \left\{ \left[\frac{k}{r} + B_4 \right] \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} - C_5 \frac{dr}{ds} \frac{d(r^2)}{ds'} \right\} ds\,ds' = 0.$$

Le second terme de la parenthèse carrée peut se transformer comme suit :

$$C_5 \frac{dr}{ds} \frac{d(r^2)}{ds'} = \frac{d}{ds} \left[\frac{d(r^2)}{ds'} \int C_5\, dr \right] - \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} \int C_5\, dr,$$

et, puisque le premier des termes du second membre donne un résultat

nul, lorsqu'on effectue l'intégration pour un circuit fermé, l'équation précédente devient

$$(54)\qquad \int\int\left[\frac{k}{r}+\mathrm{B}_4+\int \mathrm{C}_5\,dr\right]\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\,ds\,ds'=0.$$

Si cette équation doit se vérifier pour deux courants fermés quelconques, l'expression qui s'y trouve comme facteur du coefficient différentiel du second ordre doit être constante; nous pourrons écrire, a désignant une constante,

$$(55)\qquad \frac{k}{r}+\mathrm{B}_4+\int \mathrm{C}_5\,dr=a.$$

Et, si nous représentons par un seul signe l'intégrale, diminuée de la constante a, en posant

$$\mathrm{G}=\int \mathrm{C}_5\,dr-a,$$

nous aurons

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{B}_4=-\left(\frac{k}{r}+\mathrm{G}\right),\\&\mathrm{C}_5=\frac{d\mathrm{G}}{dr}.\end{aligned}\right.$$

Nous avons ainsi ramené à une seule deux des fonctions indéterminées qui entrent encore dans l'expression de X_2, et l'équation (27), qui sert à la détermination de cette quantité X_2, deviendra

$$\mathrm{X}_2=-\frac{d[\mathrm{B}_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds'}\left[-\left(\frac{k}{r}+\mathrm{G}\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{d\mathrm{G}}{dr}(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\left[-\left(\frac{k}{r}+\mathrm{G}\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{d\mathrm{G}}{dr}(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{d^2s'}{dt^2},$$

ou bien

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{X}_2=&-\frac{d[\mathrm{B}_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds'}\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{d[\mathrm{G}(x-x')]}{ds'}\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\&+\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{d[\mathrm{G}(x-x')]}{ds'}\right\}\frac{d^2s'}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

§ X. — *Résumé des résultats obtenus.*

Après avoir donné, au moyen des considérations exposées dans les § VI à IX, aux expressions de X_1, X_2, X_3, les formes simplifiées (33), (57) et (44), nous les substituerons dans l'équation (23), savoir :

$$X = \frac{x-x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3;$$

nous obtiendrons ainsi l'équation suivante, qui déterminera la composante, suivant l'axe des x, de l'action qu'une particule d'électricité, qui parcourt le chemin ds' pendant le temps dt, exerce sur une autre particule, qui parcourt le chemin ds pendant le même temps :

$$\begin{aligned} X = {} & \frac{x-x'}{r^3} + \frac{d}{ds}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt} \\ & + \frac{d}{ds'}\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\frac{d^2 s'}{dt^2} \\ & + \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}$$

Il se présente quelques simplifications dans cette expression. Si l'on tient compte de ce que x' ne dépend que de s', tandis que r dépend de s et de s', on voit qu'on peut écrire

$$-\frac{d}{ds'}\left(\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - \frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} = -k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right),$$

de sorte que trois des termes précédents se ramènent à un seul. En outre, on peut écrire, pour les mêmes raisons,

$$\frac{d}{ds}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(B_1 \frac{dx}{dt}\right) - \frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Et si l'on pose, pour abréger,

$$E_3 \frac{dr}{ds'} - \frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'} = \frac{dF}{ds'},$$

et qu'on remplace B_1 et $-B_2$ par les signes plus simples H et J, l'équation qui détermine X prendra la forme

$$
(58)\quad \left\{
\begin{aligned}
X = {} & \frac{x-x'}{r^3} + \frac{d[J(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2[G(x-x')]}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \\
& + \frac{d[G(x-x')]}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(H\frac{dx}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) \\
& + \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans la déduction de cette équation, outre l'hypothèse qu'il n'y a qu'une seule électricité qui se meut dans un conducteur fixe, nous n'avons appliqué que des propositions relatives à l'action réciproque de deux courants fermés l'un sur l'autre; et, comme ces propositions peuvent être considérées comme parfaitement certaines, il est permis d'affirmer que l'expression de X, donnée dans cette équation, est la *seule possible* dans l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur solide.

Il est encore à remarquer que cette formule est admissible, non-seulement dans le cas où l'on suppose que dans le courant il n'y a qu'une seule électricité en mouvement, mais dans le cas même où l'on admet que le courant galvanique consiste en deux courants, l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative, se mouvant en sens contraires, auquel cas il est indifférent que l'on considère ces deux courants comme égaux ou comme inégaux en intensité.

Si l'on voulait ajouter, aux propositions dont il a été fait usage ci-dessus, la condition que la loi, suivant laquelle la force dépend de la distance, a une forme simple, on pourrait déduire de la seule comparaison des termes, qui renferment encore des fonctions indéterminées de r, avec ceux dans lesquels les fonctions sont déjà déterminées, d'autres conséquences sur la forme de ces fonctions; on arriverait, par des considérations de cette nature, à ce résultat que les fonctions E, F, G et H doivent toutes avoir la forme $\frac{1}{r}\cdot$ const., de sorte qu'au lieu de ces fonctions indéterminées il ne resterait plus que des constantes indéterminées dans l'expression de X. Mais nous éviterons, pour le moment, de tirer des conséquences de cette sorte; nous allons plutôt faire usage encore d'une loi générale.

§ X. — *Application du principe de la conservation de l'énergie.*

Nous admettrons maintenant que les actions, que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre, satisfont, par elles-mêmes, au principe de la conservation de l'énergie; il faut, pour cela, que le travail, effectué par ces forces dans le mouvement des particules pendant l'élément de temps dt, puisse se représenter par la différentielle d'une quantité qui dépend des positions actuelles et de l'état de mouvement des particules.

Afin de pouvoir déterminer ce travail, supposons les expressions de Y et de Z formées à côté de l'expression (58) de X; et supposons de même formées les expressions des quantités X', Y', Z' qui sont relatives à l'action que la particule e exerce sur la particule e', ce qui n'exige que la permutation des lettres accentuées et des non accentuées. Au moyen de ces expressions, formons la quantité

$$ee'\left(\mathrm{X}\frac{dx}{dt}+\mathrm{Y}\frac{dy}{dt}+\mathrm{Z}\frac{dz}{dt}+\mathrm{X}'\frac{dx'}{dt}+\mathrm{Y}'\frac{dy'}{dt}+\mathrm{Z}'\frac{dz'}{dt}\right)dt.$$

Pour que le principe de la conservation de l'énergie soit vérifié, il faut que cette quantité soit une différentielle exacte, c'est-à-dire que la somme des six produits entre parenthèses soit le coefficient différentiel, par rapport à t, d'une fonction des coordonnées et des vitesses composantes des deux particules.

Comme l'expression (58) de X est un peu longue, nous allons en considérer les termes, soit isolément, soit par petits groupes, afin de voir de quelle manière la somme des six produits en est formée.

Le *premier* terme est

$$\frac{x-x'}{r^3}\quad \text{ou}\quad -\frac{d\frac{1}{r}}{dx},$$

et la somme des six produits, relativement à ce terme, sera

$$-\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\frac{dy'}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\frac{dz'}{dt}\right)$$

et pourra se réduire à

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}.$$

Le *second* terme est

$$\frac{d[J(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}.$$

Pour le multiplier par le coefficient différentiel $\frac{dx}{dt}$, décomposons ce dernier dans le produit $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$, et multiplions sous le signe de la différentiation par le facteur $\frac{dx}{ds}$, qui est indépendant de s'; nous aurons

$$\frac{d\left[J(x-x')\frac{dx}{ds}\right]}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Formons les produits analogues relatifs aux axes des y et des z, et commençons par ajouter ces trois produits seulement, en tenant compte de la relation

$$(x-x')\frac{dx}{ds}+(y-y')\frac{dy}{ds}+(z-z')\frac{dz}{ds}=r\frac{dr}{ds},$$

nous obtiendrons

$$\frac{d\left(Jr\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Les trois autres produits donneront de même

$$\frac{d\left(Jr\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Ces deux expressions sont égales entre elles; car, si nous posons

(59) $$K=\int Jr\,dr,$$

le coefficient différentiel qui figure comme premier facteur dans ces expressions pourra se représenter par $\frac{d^2 K}{ds\,ds'}$, et la somme des six produits prendra, en conséquence, la forme

$$2\,\frac{d^2 K}{ds\,ds'}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{ds'}{dt}.$$

Le *troisième* et le *quatrième* terme de (58), savoir

$$\frac{d^2[G(x-x')]}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\,\frac{d^2 s'}{dt^2},$$

pourront se traiter d'une manière tout à fait analogue. La somme des trois premiers produits donne

$$\frac{d^2\left[G\,r\,\frac{dr}{ds}\right]}{ds'^2}\,\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d\left[G\,r\,\frac{dr}{ds}\right]}{ds'}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d^2 s'}{dt^2}:$$

en posant

$$(60)\qquad R=\int G\,r\,dr,$$

cette somme pourra s'écrire

$$\frac{d^3 R}{ds\,ds'^2}\,\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d^2 R}{ds\,ds'}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d^2 s'}{dt^2},$$

et les trois autres produits donneront de même

$$\frac{d^3 R}{ds^2\,ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2 R}{ds\,ds'}\,\frac{ds'}{dt}\,\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

La somme des six produits sera donc

$$\left(\frac{d^3 R}{ds\,ds'^2}\,\frac{ds'}{dt}+\frac{d^3 R}{ds^2\,ds'}\,\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt}\,\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2 R}{ds\,ds'}\left(\frac{ds}{dt}\,\frac{d^2 s'}{dt^2}+\frac{ds'}{dt}\,\frac{d^2 s}{dt^2}\right);$$

cette somme peut se réduire à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\mathrm{R}}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2\mathrm{R}}{ds\,ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)$$

et enfin à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\mathrm{R}}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right).$$

Le *cinquième* terme

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{H}\frac{dx}{dt}\right)$$

donne, si l'on effectue d'abord la différentiation et qu'on multiplie ensuite par $\frac{dx}{dt}$,

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\mathrm{H}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2};$$

cette somme peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{H}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

On obtiendra de la même manière, pour l'autre produit relatif à l'axe des x, mais renfermant x' au lieu de x,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{H}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2.$$

Formant enfin les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z, on pourra réduire la somme des six produits à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{H}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right].$$

Le *sixième* terme

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$

donne, si l'on effectue la différentiation indiquée et qu'on multiplie par $\frac{dx}{dt}$,

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}-k\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x'}{dt^2}.$$

On obtient de la même manière, pour l'autre produit relatif à l'axe des x, mais renfermant x' au lieu de x,

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}-k\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

La somme de ces deux produits peut s'écrire

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right)-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}.$$

Formant les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z, et tenant compte de la relation

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

on obtiendra, pour la somme des six produits,

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right]+\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Le *septième* terme

$$\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

qui peut s'écrire

$$-\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

donne, pour la somme des six produits,

$$-\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Cette expression, et une partie de celle que nous avons obtenue pour le sixième terme, se détruisent; de sorte que le sixième et le septième terme réunis donnent simplement, pour la somme des six produits,

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right].$$

Le *huitième* terme

$$\frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

donne, pour la somme des six produits, comme on le voit aisément

$$\frac{dF}{ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Le *neuvième* et dernier terme

$$\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

peut s'écrire

$$\frac{d}{ds'}\left[\frac{dE}{ds}(x-x')+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

ou bien

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx}+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

En remplaçant encore $\frac{dx}{dt}$, qui doit multiplier cette expression, par $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$, nous effectuerons la multiplication par $\frac{dx}{ds}$ sous le signe de la différentiation. Si nous formons ensuite les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z, et que nous fassions la somme de ces trois produits, nous obtiendrons

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt},$$

et par suite, pour la somme des six produits,

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Réunissant enfin toutes les expressions trouvées, pour la somme des six produits, dans les différents termes de (58), nous obtiendrons la somme totale

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}+2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}+\frac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\\
&+\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)+\frac{dF}{ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\
&+\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Cette somme totale pourra s'écrire, en réunissant les termes qui sont des coefficients différentiels par rapport à t, et en ordonnant les autres,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{r}+\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{1}{2}H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}\\
&\quad+2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{1}{2}\frac{dH}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{dH}{ds'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^3\\
&\quad+\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E+F+\frac{1}{2}H\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}\\
&\quad+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E+F+\frac{1}{2}H\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Pour que les actions, que les deux particules d'électricité exercent l'une sur l'autre, satisfassent par elles-mêmes au principe de la conservation de l'énergie, il faut que toute cette expression soit un coefficient différentiel par rapport à t. Or cette condition est déjà manifestement remplie par la première partie de l'expression; nous n'avons donc plus qu'à en considérer la seconde partie, composée de cinq termes. Ces termes sont tous d'un degré supérieur au premier relativement aux coefficients différentiels du premier ordre $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$, tandis que les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2s}{dt^2}$ et $\frac{d^2s'}{dt^2}$ n'y entrent pas comme

facteurs. De là il résulte que ni l'un de ces termes, ni aucun groupe d'entre eux, ne peut être un coefficient différentiel par rapport à t. La somme de ces cinq termes doit donc être nulle, et il n'en peut être ainsi, pour des valeurs arbitraires de $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$, que si chacun des cinq termes est nul séparément. Nous obtenons ainsi les cinq équations de condition suivantes :

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{K}}{ds\,ds'} = 0, \\ \dfrac{d\mathrm{H}}{ds} = 0, \\ \dfrac{d\mathrm{H}}{ds'} = 0, \\ \dfrac{d}{ds'}\left[r\dfrac{d\mathrm{E}}{dr}\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 + \mathrm{E} + \mathrm{F} + \dfrac{1}{2}\mathrm{H}\right] = 0, \\ \dfrac{d}{ds}\left[r\dfrac{d\mathrm{E}}{dr}\left(\dfrac{dr}{ds'}\right)^2 + \mathrm{E} + \mathrm{F} + \dfrac{1}{2}\mathrm{H}\right] = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations, qui peut s'écrire aussi

$$\frac{d\mathrm{K}}{dr}\frac{d^2 r}{ds\,ds'} + \frac{d^2\mathrm{K}}{dr^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = 0,$$

ne peut être vérifiée, pour des trajectoires arbitraires des particules d'électricité, que si

$$\frac{d\mathrm{K}}{dr} = 0,$$

d'où il résulte, en vertu de (59),

$$(62)\qquad \mathrm{J} = 0.$$

La seconde et la troisième des équations (61)

$$\frac{d\mathrm{H}}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathrm{H}}{ds'} = 0$$

donnent d'abord

$$\mathrm{H} = \text{const.}$$

Mais, comme l'expression (58) de X renferme le terme $H\frac{d^2x}{dt^2}$ qui, pour le cas où H aurait une valeur assignable, représenterait une partie constituante de la force, indépendante de la distance mutuelle des particules d'électricité, ce qui ne peut pas être, on doit avoir

$$(63)\qquad H = 0.$$

Les deux dernières des équations (61) s'écrivent, si l'on y fait $H = 0$, et que l'on effectue les différentiations indiquées,

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\frac{dr}{ds'} + 2r\frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{d(E+F)}{dr}\frac{dr}{ds'} = 0,$$

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr}\frac{dr}{ds}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + 2r\frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{d(E+F)}{dr}\frac{dr}{ds} = 0.$$

Ces équations ne peuvent être vérifiées, pour des trajectoires quelconques des particules d'électricité, que si l'on a

$$(64)\qquad \frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dr} = 0,$$

équations qui déterminent suffisamment E et F, puisque leurs coefficients différentiels seulement entrent dans (58).

Au moyen de ces déterminations, l'expression du travail effectué, pendant l'élément de temps dt, par les actions mutuelles des deux particules d'électricité, prendra cette forme simple :

$$ee'\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{r} + \left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right\}dt,$$

et l'équation (58) deviendra

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} X = \frac{x-x'}{r^3} &+ \frac{d^2\left(\frac{dR}{dr}\frac{x-x'}{r}\right)}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{d\left(\frac{dR}{dr}\frac{x-x'}{r}\right)}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2} \\ &- k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Cette équation pourra encore s'écrire, plus simplement

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} X = &-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1+\frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right]-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\\ &+\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right].\end{aligned}\right.$$

§ XII. — *Le potentiel électrodynamique.*

D'après le résultat auquel notre exposition vient de nous conduire, le travail effectué pendant l'élément de temps dt, par les actions que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre, est représenté par la différentielle de l'expression suivante :

$$-ee'\left\{\frac{1}{r}-\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right\}.$$

Or, par la considération des forces électrostatiques, on sait que la quantité dont la différentielle négative représente le travail s'appelle le *potentiel* des deux particules d'électricité l'une sur l'autre; par analogie, on pourra donc envisager l'expression précédente, abstraction faite du signe —, comme un *potentiel*, dans un sens plus large. On pourra, en outre, considérer isolément la partie de ce potentiel qui se rapporte aux forces électrostatiques, et celle qui se rapporte aux forces dépendant du mouvement ou électrodynamiques, c'est-à-dire le potentiel *électrostatique* et le potentiel *électrodynamique*. Si nous représentons le premier par U et le second par V, nous aurons donc

$$(67)\qquad U=\frac{ee'}{r},$$

$$(68)\qquad V=-ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

L'expression que nous donnons ici du potentiel électrodynamique est la seule possible dans l'hypothèse d'une seule électricité en mouvement dans un conducteur solide.

La fonction indéterminée de r, qui y entre encore, et qui est désignée par R, ne peut pas se déterminer au moyen des effets des courants fermés; et, par suite, dans le cas où l'on voudrait la déterminer aussi, on en serait réduit, pour le moment, à se fonder sur des probabilités.

Si l'on fait l'hypothèse énoncée à la fin du § X, suivant laquelle la force serait une fonction simple de la distance, on arrive à la conclusion que

$$R = k_1 r, \tag{69}$$

k_1 désignant une constante. L'équation (68) devient alors

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + k_1\frac{d^2 r}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \tag{70}$$

Si l'on cherche, en outre, par la détermination de la constante k_1, à rendre cette expression aussi simple que possible, on trouve d'abord deux valeurs qui fixent particulièrement l'attention en ce sens : ce sont les valeurs $k_1 = 0$ et $k_1 = -k$, qui donnent

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}, \tag{71}$$

$$V = -k\frac{ee'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \tag{72}$$

Ces deux formules sont, dans leur aspect extérieur, à peu près d'une égale simplicité; mais, si l'on en fait usage dans le calcul, pour en déduire les composantes des forces, on trouve que la première donne des résultats beaucoup plus simples que la seconde, et, par suite, si l'on veut obtenir la loi de force qui est la plus simple possible, tout en satisfaisant aux phénomènes connus jusqu'à ce jour, on devra poser $k_1 = 0$, ou, ce qui revient au même, $R = 0$.

Comme l'expression du potentiel électrodynamique est plus courte et plus facile à embrasser que celles des composantes des forces, elle est particulièrement propre à la comparaison des différentes formules fondamentales de l'Électrodynamique, posées jusqu'à ce jour (à l'exception de celle de Gauss, qui ne satisfait pas au principe de la conserva-

tion de l'énergie). Nous nous proposons de faire ici cette comparaison. L'équation qui sert à la détermination du potentiel électrodynamique est :

1° D'après Weber [*],

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

2° D'après Riemann [**],

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right].$$

3° D'après l'analyse que je viens de faire :

a. Sous la forme la plus générale,

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt};$$

b. Sous une forme plus simple,

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+k_1\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt};$$

c. Sous la forme la plus simple et, par suite, la plus probable,

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

On peut aussi mettre la dernière expression sous la forme

(73) $$V = k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

---

[*] *Ann. de Pogg.*, volume jubilaire, p. 212.

[**] *Schwere, Elektricitat und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernh. Riemann,* bearbeitet von Hattendorff, Hannover, 1876, p. 326.

ou bien, si l'on représente par v et v' les vitesses des deux particules d'électricité, et par ε l'angle compris entre leurs directions,

$$(74) \qquad V = k\frac{ee'}{r}vv'\cos\varepsilon.$$

§ XIII. — *Déduction des composantes de la force au moyen du potentiel.*

Pour déduire maintenant, du potentiel électrostatique et électrodynamique, les composantes de la force, on aura à employer des équations, dans lesquelles le potentiel électrodynamique intervient de la même manière que la force vive dans les équations fondamentales de la Mécanique, données par Lagrange pour un système quelconque de coordonnées. Pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action subie par la particule e, nous aurons l'équation

$$(75) \qquad Xee' = \frac{d(V-U)}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}\right).$$

Dans celle-ci, nous devrons remplacer U et V par leurs expressions (67) et (68). De la première de ces expressions on tire simplement

$$(76) \qquad \frac{dU}{dx} = ee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

La seconde devant être traitée, dans la différentiation, comme une fonction des six coordonnées et des six vitesses composantes, nous la transformerons de telle sorte que les vitesses composantes y entrent explicitement. Pour plus de facilité, nous décomposerons d'abord V en deux parties, en posant

$$(77) \qquad V = V_1 + V_2,$$

V_1 et V_2 représentant les expressions suivantes :

$$V_1 = -\frac{kee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} = \frac{kee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

$$\begin{aligned} V_2 &= -ee'\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ &= -ee'\left(\frac{d^2R}{dx\,dx'}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dy'}\frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dz'}\frac{dx}{dt}\frac{dz'}{dt}\right. \\ &\quad + \frac{d^2R}{dy\,dx'}\frac{dy}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dy\,dy'}\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dy\,dz'}\frac{dy}{dt}\frac{dz'}{dt} \\ &\quad \left. + \frac{d^2R}{dz\,dx'}\frac{dz}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dz\,dy'}\frac{dz}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dz\,dz'}\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right). \end{aligned}$$

Nous obtiendrons ainsi, pour la première partie,

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dV_1}{dx} &= kee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right) \\ &= -\frac{k}{2}ee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}, \\ \frac{dV_1}{d\frac{dx}{dt}} &= \frac{kee'}{r}\frac{dx'}{dt}, \end{aligned}\right.$$

$$(79)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dV_1}{d\frac{dx}{dt}}\right) = kee'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right);$$

et pour la seconde partie

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dV_2}{dx} &= -ee'\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right), \\ \frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}} &= -ee'\left(\frac{d^2R}{dx\,dx'}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dy'}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dz'}\frac{dz'}{dt}\right) \\ &= -ee'\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx'}\frac{dx'}{dt} + \frac{dR}{dy'}\frac{dy'}{dt} + \frac{dR}{dz'}\frac{dz'}{dt}\right) \\ &= -ee'\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\right), \end{aligned}\right.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\right)\right],$$

ce qui pourra s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\right)\right]$$

ou bien enfin

$$(81)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right].$$

Si l'on remplace dans l'équation (75) les expressions (76), (78), (79), (80) et (81), après avoir substitué à V, dans cette équation $V_1 + V_2$, on obtient

$$X = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1 + \frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right],$$

ce qui est l'équation (66) donnée plus haut.

Le calcul se simplifie évidemment très-fort, si l'on attribue à R la valeur zéro, que nous avons regardée au § XII comme la plus probable. On obtient, dans ce cas,

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(1 + \frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\\ &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1 - k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\\ &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}(1 - kvv'\cos\varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).\end{aligned}\right.$$

C'est sous cette forme que j'ai donné, dans une Communication provisoire du mois de février 1876, l'équation qui sert à la détermination de la composante de la force suivant l'un des axes coordonnés, et qui se forme naturellement d'une manière analogue relativement aux deux autres axes.

§ XIV. — *Loi de force pour des éléments de courant.*

Si l'on veut déterminer la composante, suivant l'axe des x, de l'action qu'un élément de courant ds' exerce sur un élément ds, on devra appliquer l'équation (66) aux quatre combinaisons suivantes de quantités d'électricité, prises deux à deux, hds et $h'ds'$, hds et $-h'ds'$, $-hds$ et $h'ds'$, $-hds$ et $-h'ds'$, en considérant les quantités hds et $h'ds'$ comme étant en mouvement, $-hds$ et $-h'ds'$ comme étant en repos; et l'on aura à faire la somme algébrique des quatre expressions ainsi obtenues. On arrivera de cette manière à l'expression suivante de la composante cherchée :

$$hh'dsds'k\left[-\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

ou bien

$$hh'dsds'k\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Si l'on représente, pour les deux courants, respectivement par i et par i' l'intensité du courant, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui traverse, pendant l'unité de temps, la section normale du conducteur, la quantité d'électricité étant mesurée d'après la même unité mécanique qui a été usitée dans toutes les équations précédentes, on pourra substituer i et i' aux produits $h\frac{ds}{dt}$ et $h'\frac{ds'}{dt}$, et l'on trouvera, pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds, l'expression

$$kii'dsds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right).$$

Dans cette expression ne figure pas la fonction indéterminée R, qui a disparu dans la formation de la somme mentionnée plus haut. Nous

sommes donc arrivé, pour la composante, suivant une direction déterminée, de l'action qu'un élément de courant exerce sur un autre, à une expression entièrement déterminée, dont nous pouvons dire qu'elle est la seule qui soit compatible avec les deux hypothèses suivantes : qu'il n'y a qu'une seule électricité en mouvement dans un conducteur solide, et que les actions réciproques des deux particules d'électricité satisfont, par elles-mêmes, au principe de la conservation de l'énergie.

Sur le développement, en séries, des racines réelles des équations;

Par M. YVON VILLARCEAU.

Depuis les travaux d'Euler sur cette question, bien des solutions de formes diverses ont été obtenues par les géomètres. La plupart se sont proposé, notamment, de développer la racine x de l'équation à résoudre

$$fx = 0, \tag{1}$$

suivant les puissances de fa, a désignant une quantité quelconque, comprise entre des limites hors desquelles le développement ne serait pas convergent.

Le problème consiste à former les valeurs des coefficients de la série proposée. Lagrange, en dernier lieu, a donné plusieurs démonstrations de ses formules. Aucune des démonstrations qui sont parvenues à ma connaissance ne me paraît aussi simple que celle à laquelle je suis arrivé de mon côté. En la proposant aux géomètres, je suis prêt à reconnaître la priorité en faveur de ceux qui l'auraient déjà publiée : dans l'incertitude à cet égard, je crois utile de présenter ici une démonstration très-simple et qui certainement n'est pas connue du plus grand nombre des analystes ; car autrement on ne comprendrait pas que son degré de simplicité ne lui eût pas fait trouver place dans les *Traités de Calcul différentiel*, où l'on fait suivre l'exposition des théories de quelques-unes de leurs applications les plus importantes.

Supposons, comme d'habitude, l'équation (1) privée de racines égales; supposons en outre que, dans le cas des racines presque égales, on ait substitué à l'inconnue primitive une nouvelle inconnue divisée par un nombre k assez grand pour opérer la séparation des racines; il en résultera que la première dérivée $f'x$ ne deviendra ni nulle ni très-petite, dans le voisinage de la racine considérée.

Hors le cas de $f'x = 0$, ou très-petit, la méthode suivante convient aussi bien aux équations transcendantes qu'aux équations algébriques.

Désignant par a la valeur approchée de l'une des racines, valeur que fournira l'un quelconque des procédés en usage, nous aurons recours à la méthode des coefficients indéterminés, et nous poserons

$$(2)\quad x = a - A_1\frac{fa}{1} + A_2\frac{(fa)^2}{1.2} - A_3\frac{(fa)^3}{1.2.3} + A_4\frac{(fa)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

La forme donnée à ce développement satisfait à la condition que, si a est racine de l'équation (1), on ait effectivement $x = a$.

Ceci posé, puisque, par hypothèse, le développement (2) doit fournir une même valeur de x, lorsqu'on y introduit une valeur quelconque a prise entre les limites pour lesquelles la série est convergente, on doit avoir

$$(3)\qquad \frac{dx}{da} = 0.$$

Cette relation va nous permettre de déterminer les coefficients A_1, A_2, ... Observant que ces coefficients sont nécessairement des fonctions de a, nous aurons, en appliquant la condition (3) au développement (2),

$$0 = 1 - A_1\frac{df}{da} + \left(A_2\frac{df}{da} - \frac{dA_1}{da}\right)\frac{fa}{1} - \left(A_3\frac{df}{da} - \frac{dA_2}{da}\right)\frac{(fa)^2}{1.2} + \left(A_4\frac{df}{da} - \frac{dA_3}{da}\right)\frac{(fa)^3}{1.2.3} - \ldots.$$

Or, cette relation devant avoir lieu, quels que soient a et, par suite, fa, on en déduit les équations de condition suivantes, dont la première détermine le coefficient A_1 :

$$(4)\quad A_1\frac{df}{da} = 1,\quad A_2\frac{df}{da} = \frac{dA_1}{da},\quad A_3\frac{df}{da} = \frac{dA_2}{da},\quad A_4\frac{df}{da} = \frac{dA_3}{da},\quad \ldots$$

Il reste à exprimer les coefficients A_2, A_3, ..., au moyen des dérivées de la fonction f. Différentiant la première de ces équations, nous aurons, en transposant ensuite le terme en A_1,

$$\frac{dA_1}{da}\frac{df}{da} = -A_1\frac{d^2f}{da^2};$$

d'où, en vertu de l'une des relations (4),

$$A_2 \frac{df^2}{da^2} = - A_1 \frac{d^2 f}{da^2}.$$

Cette équation nous fournit la valeur de A_2 en fonction de A_1 ; en la différentiant de même, on aura

$$\frac{dA_2}{da}\frac{df^2}{da^2} = - A_1 \frac{d^3 f}{da^3} - \frac{dA_1}{da}\frac{d^2 f}{da^2} - 2A_2 \frac{df}{da}\frac{d^2 f}{da^2};$$

en ayant égard aux valeurs (4) de $\frac{dA_1}{da}$ et $\frac{dA_2}{da}$, on en déduit

$$A_3 \frac{df^3}{da^3} = - A_1 \frac{d^3 f}{da^3} - 3A_2 \frac{d^2 f}{da^2}\frac{df}{da}.$$

Ceci suffit pour montrer comment s'obtiendront, de proche en proche, les résultats que l'on a réunis dans le tableau suivant :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_1 \frac{df}{da} = 1,\\
&A_2 \frac{df^2}{da^2} = - A_1 \frac{d^2 f}{da^2},\\
&A_3 \frac{df^3}{da^3} = - A_1 \frac{d^3 f}{da^3} - A_2\left[3\frac{d^2 f}{da^2}\frac{df}{da}\right],\\
&A_4 \frac{df^4}{da^4} = - A_1 \frac{d^4 f}{da^4} - A_2\left[4\frac{d^3 f}{da^3}\frac{df}{da} + \tfrac{1}{2}6\left(\frac{d^2 f}{da^2}\right)^2\right] - A_3\left[6\frac{d^2 f}{da^2}\frac{df^2}{da^2}\right],\\
&A_5 \frac{df^5}{da^5} = - A_1 \frac{d^5 f}{da^5} - A_2\left[5\frac{d^4 f}{da^4}\frac{df}{da} + 10\frac{d^3 f}{da^3}\frac{d^2 f}{da^2}\right],\\
&\qquad\qquad - A_3\left[10\frac{d^3 f}{da^3}\frac{df^2}{da^2} + 15\left(\frac{d^2 f}{da^2}\right)^2\frac{df}{da}\right] - A_4\left[10\frac{d^2 f}{da^2}\frac{df^3}{da^3}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Ainsi qu'on l'a annoncé, les coefficients A_1, A_2, ... se trouvent exprimés directement, au moyen des seules dérivées de la fonction f. La loi des coefficients est facile à reconnaître jusqu'aux termes en A_2 ; mais, au delà, il est difficile de l'apercevoir.

Il sera utile, dans les applications, d'obtenir les valeurs explicites des coefficients : pour en simplifier l'écriture, il nous paraît convenable de remplacer les dérivées par certaines fonctions de ces déri-

vées, en posant

$$(6)\quad \alpha_1 = 1 : \frac{df}{da}, \quad \alpha_2 = \frac{d^2 f}{da^2} : \frac{df^2}{da^2}, \quad \alpha_3 = \frac{d^3 f}{da^3} : \frac{df^3}{da^3}, \quad \alpha_4 = \frac{d^4 f}{da^4} : \frac{df^4}{da^4}, \quad \ldots$$

Nous nous dispenserons d'écrire ici le résultat de la transformation des formules (5).

Par un transport successif des valeurs des coefficients obtenus, dans les expressions de ceux qui viennent ensuite, on forme les valeurs explicites des divers coefficients, et l'on peut écrire immédiatement la valeur de x, en portant ces coefficients dans le développement (2); il vient ainsi finalement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x = a &- \alpha_1 \frac{fa}{1} - \alpha_1 \alpha_2 \frac{(fa)^2}{1.2} + \alpha_1 (\alpha_3 - 3\alpha_2^2) \frac{(fa)^3}{1.2.3} \\ &- \alpha_1 (\alpha_4 - 10\alpha_3\alpha_2 + 15\alpha_2^3) \frac{(fa)^4}{1.2.3.4} \\ &+ \alpha_1 (\alpha_5 - 15\alpha_4\alpha_2 + 105\alpha_3\alpha_2^2 - 105\alpha_2^4 - 10\alpha_3^2) \frac{(fa)^5}{1.2.3.4.5} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

développement qui, réduit à ses deux premiers termes, s'identifie avec le résultat de l'application de la méthode de Newton.

Sous cette forme, il est visible que l'on pourra calculer assez rapidement les trois ou quatre premiers termes qui viennent à la suite de a.

La série sera d'autant plus convergente, que l'arbitraire a sera plus voisine d'une des racines : il est évident que cette arbitraire a ne pourra servir à déterminer une racine, qu'autant qu'elle restera comprise dans les limites hors desquelles le développement cesserait d'être convergent, et qu'entre ces limites la formule fournira une valeur unique de x; car autrement, on ne concevrait pas qu'elle donnât la valeur de l'une des racines réelles de l'équation proposée, plutôt que celle des autres, si l'équation en a plusieurs. On comprend dès lors comment on obtiendra les autres racines réelles, au moyen de valeurs assez approchées pour que le développement reste convergent.

Ces considérations nous semblent établir une liaison intime entre le problème de la séparation des racines et celui de la convergence de la série (7).

On pourra remarquer que la précédente méthode s'appliquerait à la détermination des racines d'un système d'équations à plusieurs incon-

nues; mais les résultats seraient notablement plus compliqués que ceux relatifs à une seule.

Présentons quelques applications numériques de nos formules.

Premier exemple — Nous choisirons celui que l'on trouve dans le *Dictionnaire des Sciences mathématiques* de M. de Montferrier, t. II, p. 458.

Soit l'équation à résoudre

$$fx = x^3 - 2x - 20 = 0;$$

on en déduit

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = +6x, \quad \frac{d^3f}{dx^3} = +6.$$

Observant que l'une des racines est comprise entre 2 et 3, mais plus voisine de ce dernier nombre, on fera

$$a = 3; \quad \text{d'où} \quad fa = +1, \quad \frac{df}{da} = +25, \quad \frac{d^2f}{da^2} = +18, \quad \frac{d^3f}{da^3} = +6,$$

et les formules (6) donneront

$$\alpha_1 = \frac{1}{25}, \quad \alpha_2 = \frac{18}{(25)^2}, \quad \alpha_3 = \frac{6}{(25)^3}, \quad \text{d'où} \quad \alpha_3 - 3\alpha_2^2 = -6\frac{137}{(25)^4};$$

mettant ces valeurs dans la formule (7), il vient

$$x = 3 - \frac{1}{25} - \frac{9}{(25)^3} - \frac{137}{(25)^5} - \ldots = 3 - 0{,}04 - 0{,}000576 - 0{,}000014 \ldots$$

ou

$$x = 2{,}959410.$$

Vérification :

$$\begin{aligned} x^3 &= +25{,}91884 \\ -2x - 20 &= -25{,}91882 \\ \text{Somme}\ldots &= +\ 0{,}00002 \quad (*). \end{aligned}$$

Deuxième exemple. — Résolution de l'*Équation* dite *des Comètes*.

$$fx = \sin^4 x - \frac{1}{h}\sin(x - g) = 0;$$

pour faciliter les différentiations, on mettra l'expression de fx sous la forme

$$fx = +\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{h}\sin(x - g) + \frac{3}{8},$$

(*) Au moyen du même nombre de termes, l'auteur du *Dictionnaire* trouve $x = 2{,}9594047$ et l'erreur de l'équation est $-0{,}00011$; la cause de cette erreur est dans une faute de signe, qu'il a commise en faisant la *somme combinatoire* à laquelle il a eu recours.

et l'on en déduira

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{2}\sin 4x + \sin 2x - \frac{1}{h}\cos(x-g),$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -2\cos 4x + 2\cos 2x + \frac{1}{h}\sin(x-g),$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = +8\sin 4x - 4\sin 2x + \frac{1}{h}\cos(x-g).$$

Soient donnés

$$l.h = 0,1761986, \quad g = -25^\circ 37' 47'',04.$$

On suppose (voir *Annales de l'Observatoire,* Mémoires, t. III, p. 154), que l'angle $x-g$ ou $C-g$ du Mémoire, est voisin de 90 degrés : nous poserons

$$a - g = 90^\circ;$$

d'où

$$a = 64^\circ 22' 12'',96, \qquad fa = -0,0056995, \qquad l.fa = 7,75584-$$

$$2a = 128\ 44\ 25,92, \qquad \sin 2a = +0,77999, \qquad \cos 2a = -0,62579,$$

$$4a = 257\ 28\ 51,84, \qquad \sin 4a = -0,97622, \qquad \cos 4a = -0,21676,$$

$$\frac{1}{h}\cos(a-g) = 0, \qquad \frac{1}{h}\sin(a-g) = +0,66650:$$

il s'ensuit

$$l.\frac{df}{da} = 0,103154+, \quad l.\frac{d^2f}{da^2} = 9,18058-, \quad l.\frac{d^3f}{da^3} = 1,03861-,$$

$$l.\alpha_1 = 9,896846+, \quad l.\alpha_2 = 8,97427-, \quad l.\alpha_3 = 0,72915-,$$

$$l.(\alpha_3 - 3\alpha_2^2) = 0,73130-,$$

$$l.-\alpha_1\alpha_2 = 8,8711+, \qquad l.\alpha_1(\alpha_3 - 3\alpha_2^2) = 0,6281-,$$

$$-\alpha_1\frac{fa}{1} = +0,0044946 \qquad l. = 7,65269+$$

$$-\alpha_1\alpha_2\frac{(fa)^2}{1.2} = +0,0000012 \qquad l. = 4,0817+$$

$$\alpha_1(\alpha_3 - 3\alpha_2^2)\frac{(fa)^3}{1.2.3} = +0,0000001 \qquad l. = 3,1175+$$

$$\text{Somme....} \quad +0,0044959 = 0^\circ 15' 27'',36$$

$$a = 64\ 22\ 12,96$$

$$x = 64\ 37\ 40,32$$

$$x - g = 90\ 15\ 27,36.$$

Vérification :

$$l.\sin^4 x = 9,8237969$$

$$l.\frac{1}{h}\sin(x-g) = 9,8237970$$

$$\text{Erreur} = 0,0000001$$

Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques;

Par M. L. FUCHS,

à Heidelberg.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.

1. Je me propose le problème de déterminer les coefficients de l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_0 y = 0,$$

de manière qu'elle soit satisfaite par un système fondamental d'intégrales uniformes $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ayant la propriété qu'en posant

$$(2)\qquad y_i = f_i(x),$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_i(x+2\mathrm{K}) = \mu_i f_i(x) \\ f_i(x+2\mathrm{K}'i) = \mu'_i f_i(x) \end{array}\right\} \; i = 1, 2, 3, \ldots, m;$$

et que les points singuliers de l'équation différentielle soient des pôles de ses intégrales.

On voit d'abord que les quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$ sont des fonctions uniformes doublement périodiques aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}i'$. En posant dans l'équation différentielle y_i au lieu de y et en exprimant $p_{m-1}, p_{m-2}, \ldots, p$, au moyen des équations au nombre m, ainsi obtenues, on obtient (*voir*

mon Mémoire, t. LXVI du *Journal de M. Borchardt*, n° 4) ces coefficients comme fonctions des quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$.

Donc ces coefficients sont des fonctions uniformes, doublement périodiques aux périodes 2K *et* 2K′*i qui ne deviennent infinies que de manière que leurs valeurs réciproques restent continues.*

Comme les intégrales ne deviennent discontinues pour un point singulier a, que de manière qu'elles se transforment en fonctions holomorphes dans le voisinage de a, en les multipliant par une puissance déterminée de $(x-a)$, il s'ensuit (*voir* mon Mémoire, t. LXVI, n° 4, et t. LXVIII, n° 3, du *Journal de M. Borchardt*) qu'on a dans le voisinage de a

$$(4) \qquad p_i = \frac{P_i}{(x-a)^i},$$

où P_i est holomorphe dans le même voisinage.

2. Considérons en particulier l'équation différentielle du deuxième ordre

$$(A) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + p_1\frac{du}{dx} + p_2 u = 0;$$

on a, dans le voisinage d'un point singulier a,

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\alpha}{x-a} + q_1, \\ p_2 = \dfrac{\beta}{(x-a)^2} + \dfrac{\beta'}{x-a} + q_2, \end{cases}$$

où α, β, β' sont des constantes et q_1, q_2 des fonctions holomorphes dans le voisinage de a; donc les fonctions doublement périodiques p_1, p_2 ne deviennent infinies pour $x=a$ que respectivement de premier et de second ordre.

Par suite, si l'on représente p_1 selon votre méthode (*Note sur la théorie des fonctions elliptiques*, ajoutée à la 6e édition du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de Lacroix), on obtient

$$(2) \qquad p_1 = \gamma + \sum_k A_k D_x \log H(x-a_k),$$

où le signe Σ se rapporte à tous les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ contenus dans un parallélogramme de périodes et où γ signifie une constante, et où, de plus,

$$(3) \qquad \sum_k \mathrm{A}_k = 0.$$

Il s'ensuit

$$(4) \qquad v = e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx} = e^{-\frac{1}{2}\gamma x} \prod_k [\mathrm{H}(x-a)]^{-\frac{1}{2}\mathrm{A}_k}.$$

En posant

$$(5) \qquad u = vy,$$

on a

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{P}y,$$

où

$$(6) \qquad \mathrm{P} = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx} - p_0;$$

donc P est aussi une fonction uniforme doublement périodique qui devient infinie dans les points singuliers au plus de l'ordre 2, et si l'équation différentielle (A) possède un système fondamental d'intégrales

$$y_1 = f_1(x), \quad y_1 = f_2(x),$$

avec la propriété indiquée par l'équation (3), n° **1**, l'équation différentielle (B) a aussi un tel système fondamental, puisque la fonction v satisfait aux équations (3), n° **1**, en ayant égard aux équations (3) de ce numéro. Donc nous pouvons nous restreindre à la recherche concernant l'équation différentielle (B).

3. Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction uniforme satisfaisant aux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{F}(x + 2\mathrm{K}) = \mu \mathrm{F}(x), \\ \mathrm{F}(x + 2\mathrm{K}'i) = \mu' \mathrm{F}(x), \end{cases}$$

et qui ne devient infinie que d'ordre fini, $\mathrm{D}_x \log \mathrm{F}(x)$ est uniforme doublement périodique et ne devient infini que du premier ordre.

Par suite on a, d'après votre mode de représentation,

$$(2) \qquad D_x \log F(x) = \delta + \sum_i r_i D_x \log H(x - a_i),$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros et les infinis de la fonction $F(x)$ contenus dans le parallélogramme des périodes, δ désignant une constante et

$$(3) \qquad \sum_i r_i = 0.$$

De l'équation (2) il suit

$$(4) \qquad F(x) = e^{\delta x + \delta'} \prod_i [H(x - a_i)]^{r_i},$$

où le signe Π s'étend aussi aux mêmes zéros et infinis, δ' désignant une constante. La fonction $F(x)$ étant uniforme, les exposants r sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, selon que a correspond à un zéro ou un infini.

On a, dans le voisinage de a_k,

$$(5) \qquad \begin{cases} \delta + \sum_i r_i D_x \log H(x - a_i) \\ \qquad = \dfrac{r_k}{x - a_k} + \sum_i' r_i D_x \log H(a_k - a_i) + \delta + \varphi(x), \end{cases}$$

où le signe $\sum_i'$ s'étend à tous les a_i, excepté a_k, $\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe dans le voisinage de a_k et $\varphi(a_k) = 0$; donc, en posant

$$(6) \qquad R_k = \sum_i' r_i D_x \log H(a_k - a_i) + \delta,$$

il s'ensuit de l'équation (2) que, dans le voisinage de a_k,

$$(7) \qquad [D_x \log F(x)]^2 = \frac{r_k^2}{(x - a_k)^2} + 2\frac{r_k R_k}{x - a_k} + \psi,$$

où ψ est holomorphe dans le voisinage de a_k.

On a donc, d'après votre mode de représentation des fonctions doublement périodiques,

$$(8)\quad \begin{cases} [D_x \log F(x)]^2 = \varepsilon + \sum_i [2 r_i R_i D_x \log H(x - a_i) \\ \qquad\qquad - r_i^2 D_x^2 \log H(x - a_i)], \end{cases}$$

ε étant constant. Il s'ensuit

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{1}{F(x)} D_x^2 F(x) - D_x^2 \log F(x) + [D_x \log F(x)]^2 \\ \qquad = \varepsilon + \sum_i [(2 r_i R_i D_x \log H(x - a_i) \\ \qquad\qquad + (r_i - r_i^2) D_x^2 \log H(x - a_i)], \end{cases}$$

d'où ce théorème :

Pour que l'équation différentielle

$$(B)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = P y$$

soit satisfaite par une intégrale uniforme ayant les propriétés indiquées, il faut et il suffit que P *ait la forme*

$$(10)\quad P = \varepsilon + \sum_i [A_i D_x \log H(x - a_i) + B_i D_x^2 \log H(x - a_i)],$$

et

$$A_i = 2 r_i R_i, \quad B_i = r_i - r_i^2,$$

r_i étant un nombre entier. On a alors

$$(11)\qquad F(x) = e^{\lambda x + \lambda'} \prod_i [H(x - a_i)]^{r_i} \prod_k H(x - a'_k),$$

où le signe $\prod_k$ s'étend à toutes les valeurs a'_k pour lesquelles la fonction $F(x)$ s'annule, et pour lesquelles $r_k = 1$, $R_k = 0$: donc $A_k = 0$, $B_k = 0$. Pour ces valeurs a'_k la fonction P ne devient pas infinie ; en désignant leur nombre par k, on a, d'après l'équation (3),

$$(12)\qquad k + r_1 + r_2 + \ldots = 0,$$

où $r_1, r_2, \ldots$ appartiennent à ceux des points a pour lesquels la fonction P devient infinie.

4. Supposant maintenant que l'équation différentielle (B) ait une intégrale y_1 de la forme (11) du numéro précédent,

$$(1)\qquad y_2 = \int \frac{dx}{y_1^2}$$

est aussi une intégrale de la même équation. D'après le mode de représentation que vous venez de publier dans les *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 693, on a

$$(2)\qquad \frac{1}{y_1^2} = \sum [A f(x-a) + A_1 D f(x-a) + \ldots + A_r D^r f(x-a)],$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros a de la fonction y, de manière que, d'accord avec la signification indiquée ci-dessus, y_1 devient zéro de l'ordre r.

La quantité A est le coefficient de $(x-a)^{2r-1}$ dans le développement de $\frac{(x-a)^{2r}}{y_1^2}$ suivant les puissances de $(x-a)$.

L'intégrale y_2 se comporte dans le voisinage de a comme un logarithme, sinon $A = 0$.

Si l'on veut donc que y_2 soit aussi uniforme, on doit avoir, pour tous les zéros de y_1, $A = 0$; par suite on a

$$(3)\qquad \frac{1}{y_1^2} = \sum [A_1 D f(x-a) + \ldots + A_r D^r f(x-a)];$$

donc y_2 a la forme

$$(4)\qquad y_2 = y_1 [A_1 f(x-a) + A_2 D f(x-a) + \ldots + A_r D^{r-1} f(x-a)],$$

et elle satisfait aux équations (1), n° 3, et de plus y_1, y_2 font un système fondamental.

5. Application au cas de l'équation différentielle de Lamé.

En supposant que dans l'équation différentielle (B) la fonction P ne

devient infinie dans le parallélogramme de période que pour la valeur $x = 2K'i$ et en posant

$$(1)\qquad \varepsilon = h + n(n+1)\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

$$(2)\qquad A = 2rR = 0,$$

$$(3)\qquad B = r - r^2 = -n(n+1),$$

l'équation différentielle devient, d'après une formule connue,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\sin^2\operatorname{am}x + h]y :$$

c'est l'équation de Lamé sous la forme que vous lui avez donnée, p. 690 des *Comptes rendus*.

On a, dans ce cas,

$$(4)\qquad y_1 = F(x) = \frac{e^{\delta x+\delta'}H(x-a'_1)H(x-a'_2)\ldots H(x-a'_n)}{\Theta(x)},$$

les quantités a'_1, a'_2 dépendant essentiellement de la valeur de h.

Pour le cas spécial

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2\sin^2\operatorname{am}x + k^2\sin^2\operatorname{am}a - 1 - k^2)y,$$

dont vous parlez dans votre lettre du 27 octobre 1877, on a $n = 1$, et

$$(6)\qquad y_1 = F(x) = e^{\delta x}\frac{H(x-a')}{\Theta(x)}.$$

En posant cette valeur dans l'équation différentielle (5), on déduit $a' = a$, $\delta = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$, et l'on parvient ainsi à l'intégrale que vous avez trouvée,

$$(7)\qquad y_1 = F(x) = \frac{H(x-a)}{\Theta(x)}e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}.$$

Une autre intégrale y_2, faisant un système fondamental avec y_1, se trouve par l'équation

$$(8) \qquad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}.$$

Pour l'évaluer on peut suivre le chemin que j'ai indiqué dans ma Lettre du 30 octobre, mais on peut aussi exprimer $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, p. 693 des *Comptes rendus*.

6. En représentant $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, je vous demande de me permettre de faire auparavant une remarque à l'égard de votre fonction $f(x)$. Pour qu'on puisse représenter une fonction $F(x)$ devenant infinie pour *un nombre infini de points du plan*, par $f(x)$ et les dérivées de cette fonction, il faut que $f(x)$ jouisse de la même propriété.

Par là il est défendu que la quantité ω soit telle que

$$H(x+\omega) = e^{\alpha x+\beta} H(x),$$

où α, β sont des constantes. Cette équation n'est remplie que si

$$\omega = m\,2K + n\,2K'i,$$

où m et n sont des nombres entiers. Posons donc

$$(1) \qquad \psi(x) = \frac{1}{y_1^2},$$

on a

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi(x+2K) = \mu\,\psi(x), \\ \psi(x+2K'i) = \mu'\,\psi(x), \end{cases}$$

où

$$(3) \qquad \begin{cases} \mu = e^{-4K\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}, \\ \mu' = e^{-2\frac{i\pi}{K}a - 4iK'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}. \end{cases}$$

Pour exprimer $\psi(x)$ par votre formule, on doit poser, p. 692 des *Comptes rendus*,

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda = -2\dfrac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}, \\ \omega = 2a. \end{cases}$$

Votre formule est donc applicable pour notre cas, *excepté* pour les valeurs de a que voici

$$(5)\qquad a = m\mathrm{K} + n\mathrm{K}'i \quad (m,\ n \text{ nombres entiers}),$$

c'est-à-dire, comme $\Theta(a)$ ne doit pas être zéro, afin que $\sin\operatorname{am} a$ entrant dans l'équation différentielle reste fini pour ces valeurs de a, pour lesquelles on a $\mathrm{H}(a)\mathrm{H}_1(a)\Theta_1(a) = 0$, où

$$(5a)\qquad \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a = 0.$$

Mais si a n'appartient pas aux valeurs (5), la fonction $\psi(x)$ est représentable par votre formule, et nous choisissons

$$(6)\qquad f(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(2a)}\,\frac{\mathrm{H}(x+2a)}{\mathrm{H}(x)}\,e^{-2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

La fonction $\psi(x)$ ne devient infinie dans un parallélogramme de période que pour le point $x = a$, et là elle devient infinie de second ordre. Le coefficient de $x - a$ dans le développement de $\psi(x)(x-a)^2$, selon les puissances de $x - a$, s'annule; par suite on a, d'après votre formule, p. 693 des *Comptes rendus*,

$$(7)\qquad \psi(x) = \mathrm{A}_1\,\mathrm{D}f(x-a);$$

donc, à un facteur constant près,

$$(8)\qquad y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2} = y_1 f(x-a) = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}\,e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

comme vous avez trouvé aussi.

Il suit du développement précédent qu'il y a une exception, si a appartient à la valeur (5), mais aussi qu'il n'y a pas d'autre exception. Cela est d'accord avec ce que j'ai indiqué dans ma Lettre précédente. Dans ce cas d'exception on doit, ou procéder comme je l'ai déjà fait dans ma Lettre, ou choisir une fonction $f(x)$ par laquelle soit représentable une fonction $F(x)$ jouissant de la propriété

$$\begin{aligned} F(x+2K) &= \mu F(x), \\ F(x+2K'i) &= \mu' F(x). \end{aligned}$$

Voici maintenant avec plus de détails les calculs relatifs à ma Lettre du 30 octobre, pour l'évaluation de l'intégrale $y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$.

Je pars de l'équation connue

$$(1)\qquad \int_0^x \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x}\, dx = -x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

qui vaut pour toutes les valeurs de a, excepté les valeurs

$$(2)\qquad a = mK + nK'i \quad (m, n \text{ nombres entiers}).$$

Par la différentiation de l'équation (1) on obtient

$$(3)\qquad D_x \log \frac{H(x-a)}{H(x+a)} = -2\left[\frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right],$$

de là

$$(4)\qquad D_x \log \frac{H(x-a)}{H(x+a)} + 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x = -2 \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

D'autre part on sait que

$$\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x = -\frac{\Theta^2(0) H(x+a) H(x-a)}{K \Theta^2(x) \Theta^2(a)};$$

donc l'équation (4) devient

$$D_x \log\left[\frac{H(x-a)}{H(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}\right] = -k_1 \frac{H(a)H_1(a)\Theta_1(a)}{\Theta(a)\Theta^2(0)} \frac{\Theta^2(x)}{H(x+a)H(x-a)}.$$

Multipliant les deux membres par

$$\frac{H(x-a)}{H(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

il suit

$$(5) \qquad D\left[\frac{H(x-a)}{H(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}\right] = \text{const.} \frac{\Theta^2(x) e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}}{H^2(x+a)} = \frac{\text{const}}{y_1^2}.$$

De cette équation on déduit

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{dx}{y_1^2} = \text{const.} \frac{H(x-a)}{H(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

par suite, à un facteur constant près,

$$(6) \qquad y_2 = \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

L'équation (1) est en défaut, si l'on attribue à la quantité a une des valeurs (2).

Prenons $a = 0$, $a = K$, $a = K + iK'$: alors on a, à des facteurs constants près, respectivement

$$y_1 = \sin \operatorname{am} x, \quad y_1 = \cos \operatorname{am} x, \quad y_1 = \Delta \operatorname{am} x;$$

mais

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \operatorname{am} x} = \mathfrak{I} x - D \log H(x),$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \operatorname{am} x} = \mathfrak{I}_1 x - D \log H_1(x),$$

$$\int \frac{dx}{\Delta^2 \operatorname{am} x} = \mathfrak{I}_2 x - D \log \Theta_1(x),$$

$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ étant des constantes connues ; donc, on a respectivement

$$y_2 = \mathfrak{h}\,x\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{h}_1\,x\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{h}_2\,x\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Heidelberg, 16 novembre 1877.

A votre demande j'ajoute ici aujourd'hui un résumé bref des recherches que j'ai faites depuis que je vous adressai la lettre mentionnée dans cette Note et que j'ai publiées dans les *Nouvelles de la Société royale de Göttingue* (d. d. 15 décembre 1877).

L'équation différentielle de Lamé et de même ces équations différentielles qui font base à la théorie des fonctions de Lamé d'ordre supérieur, introduites par M. Heine, ne sont que des cas particuliers d'une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre, que j'ai traitées dans mon travail (*Journal de M. Borchardt*, t. LXXXI, p. 116-118, n° 13), et que j'y ai intégrée au moyen d'intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

Dans la Note mentionnée insérée dans les *Nouvelles de la Société royale de Göttingue*, après avoir résumé dans le n° 1 le résultat principal du n° 13 de mon travail du t. LXXXI du *Journal de M. Borchardt*, je fais voir dans le n° 2, au moyen de ce résultat, que, pour que l'équation spéciale

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{R}(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{R}'(z)\frac{du}{dz} + \mathrm{H}(z)\,u = 0,$$

où $\mathrm{R}(z)$, $\mathrm{H}(z)$ sont des fonctions rationnelles et entières respectivement du degré m et $m-2$, et $\mathrm{R}'(z) = \frac{d\mathrm{R}(z)}{dz}$, ait une intégrale de la forme

$$u = \mathrm{G}^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\text{[illegible]}}\int\frac{dz}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{R}}}},$$

où G est une fonction rationnelle et entière et λ une constante, il faut et il suffit que, pour tout zéro b de la fonction $G(z)$,

$$(B)\qquad G'(b)^2 R(b) = -\lambda$$

et

$$(C)\qquad H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Si λ s'annule, $G(z)$ s'annule pour $z = b$ de premier ou de second ordre, selon que $R(b)$ est égal à zéro ou différent de zéro. Dans ce cas, si $R(b)$ est différent de zéro, on a

$$(B')\qquad \frac{G'''(b)}{G''(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)}.$$

Dans le n° 3 j'applique les résultats du n° 21 de mon Mémoire cité contenu dans le *Journal de M. Borchardt*, t. LXXXI, p. 129, desquels il suit que $G(z)$ satisfait toujours à l'équation différentielle

$$(D)\qquad R\frac{d^3\omega}{dz^3} + \frac{3}{2}R'\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left[\frac{1}{2}R'' + 4H\right]\frac{d\omega}{dz} + 2H'\omega = 0,$$

au moyen de laquelle je détermine les coefficients de la fonction $G(z)$, et j'établis les conditions pour que l'équation (A) ait une intégrale de la forme $G_1(z)\sqrt{R_1(z)}$, $G_1(z)$, $R_1(z)$ étant des fonctions rationnelles et entières dont la dernière ne s'annule que du premier ordre et seulement pour les racines de l'équation $R(z) = 0$.

Ayant ainsi trouvé $G(z)$, si $G(z)$ n'a aucun facteur quadratique, l'équation (A) a un système fondamental d'intégrales

$$(E)\qquad u_1 = G^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},\quad u_2 = G^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},$$

Je démontre dans le n° 4 que l'intégrale $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ est une intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie pour $z = b_i$ comme la fonction $\pm\frac{1}{2}\log(z - b_i)$. En me réservant l'évaluation de ces intégrales au moyen des fonctions Θ abéliennes, ainsi que la con-

sidération plus approfondie du cas $\lambda = 0$ à une autre occasion, je me restreins dans les numéros suivants au cas

$$(\mathrm{A}') \qquad \mathrm{R}(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}\mathrm{R}'(z)\frac{du}{dz} - [n(n+1)k^2z^2 + h]u = 0,$$

où

$$\mathrm{R}(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

que l'on obtient en faisant dans l'équation de Lamé

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\mathrm{R}(z)}.$$

En évaluant alors les intégrales (E), je trouve, dans le n° 5, le système fondamental d'intégrales de l'équation de Lamé

$$(\mathrm{F}) \qquad \begin{cases} y_1 = \prod_1^n{}_l\, e^{-\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \\ y_2 = \prod_1^n{}_l\, e^{+\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \end{cases}$$

en désignant par $b_i = \sin \mathrm{am}\, \beta_i$ l'une des racines de l'équation $\mathrm{G}(z) = 0$ et en déterminant le signe de $\varepsilon_l = \pm 1$ par l'équation

$$\mathrm{G}'(b_l)\sqrt{\mathrm{R}(b_l)} = \varepsilon_l\sqrt{-\lambda}.$$

Il est remarquable que les cas d'exceptions s'offrent par la même méthode sans aucune difficulté. En effet, je démontre dans le n° 6 qu'il n'y a d'exception que quand l'équation (A') est satisfaite elle-même par une intégrale algébrique, c'est-à-dire pour les valeurs de h pour lesquelles on peut satisfaire au système d'équations linéaires suivantes :

$$(\mathrm{G}) \quad \begin{cases} (l+2)(l+1)c_{l+2} - [(l+\alpha)^2 + (l+\beta)^2k^2 + h]c_l \\ \qquad + k^2(l+\alpha+\beta+n-1)(l+\alpha+\beta-n-2)c_{l-2} = 0, \end{cases}$$

pour

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-\alpha-\beta+2,$$

où α, β désignent l'un ou l'autre des nombres 0, 1. Selon que $n-\alpha-\beta$ est pair ou impair, on peut poser les coefficients d'indices impairs ou pairs égaux à zéro, et l'élimination des quantités c restantes conduit à une équation algébrique

$$\text{(H)} \qquad \psi(h)=0,$$

pour déterminer la quantité h. Les intégrales de l'équation de Lamé se trouvent dans ce cas comme voici :

En posant $n-\alpha-\beta=\mu$, on a

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= (\cos \operatorname{am} x)^{\alpha} (\Delta \operatorname{am} x)^{\beta} (\sin \operatorname{am} x)^{\varepsilon} \prod_{l=1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \frac{\mathrm{H}(x+\beta_l)\mathrm{H}(x-\beta_l)}{\Theta(x)^{\mu-\varepsilon}}, \\ y_2 &= y_1 \left[\begin{aligned} &\left(\sigma - \tau \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}\right) x + \sum_{l=1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \omega_l \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x+\beta_l)\mathrm{H}(x-\beta_l) \\ &- \varepsilon \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x) + \alpha\gamma \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}_1(x) + \beta\delta \mathrm{D}_x \log \Theta_1(x) \end{aligned} \right], \end{aligned} \right.$$

$b_i = \sin\beta_i$ étant racine de l'équation $\mathrm{F}_{\alpha\beta}(z)=0$, où $\mathrm{F}_{\alpha\beta}(z)$ est une fonction rationnelle et entière du degré μ, dont les coefficients se déterminent par l'équation (G).

Dans les formules (I) on a $\varepsilon=0$ ou $\varepsilon=1$, selon que μ est pair ou impair, et

$$\gamma = \frac{2}{\mathrm{R}'(1)\mathrm{F}_{\alpha\beta}^2(1)}, \quad \delta = \frac{2}{k\mathrm{R}'\left(\frac{1}{k}\right)\mathrm{F}_{\alpha\beta}^2\left(\frac{1}{k}\right)},$$

$$\sigma = -k^2 \sum_{l}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \frac{b_l^2}{f_{\alpha\beta}'(b_l)^2\mathrm{R}(b_l)} + \alpha\gamma k^2 + \beta\delta,$$

$$\omega_l = -\frac{1}{\mathrm{R}(b_l)f_{\alpha\beta}'(b_l)^2} \quad \tau = 2\sum_{l=1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \omega_l - \varepsilon + \alpha\gamma + \beta\delta,$$

$$f_{\alpha\beta} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{\alpha}\left(\sqrt{1-k^2z^2}\right)^{\beta}.$$

Enfin j'explique, dans le n° **7**, aussi par une autre méthode, en m'appuyant seulement sur les principes de la théorie des équations différentielles linéaires, sans recourir à l'évaluation des intégrales, pourquoi l'exception doit se présenter dans le cas indiqué.

Heidelberg, 31 janvier 1878

L. Fuchs.

Géométrie et Géomécanique. Aperçu des faits qui montrent la connexion de ces sciences, dans l'état présent de leur développement (1) ;

Par M. W. FIEDLER.

A l'article 170 de mon Ouvrage : « Die darstellende Geometrie in organischer verbindung mit der Geometrie der Lage », 2e édition 1875, j'ai, en traitant de la réciprocité involutoire du système focal (*Nullsystem*), fait tout particulièrement ressortir que ce système est l'expression purement géométrique des deux problèmes de la composition des forces dans l'espace et du mouvement d'une figure de forme invariable et, par conséquent, l'un des fondements essentiels de la Statique graphique et de la Cinématique. J'ai eu soin, bien entendu, de citer, en même temps, les passages des ouvrages de Möbius et de Staudt qui se rapportent à la connexion ainsi signalée.

J'ai insisté, alors, sur cette remarque, dans la conviction qu'elle portait sur une corrélation, non pas seulement apparente, mais véritablement essentielle, et par ce motif que, dans ma pratique de l'enseignement, j'avais éprouvé que, poussée plus loin, l'étude de ces rapports fournissait un exemple singulièrement fécond de l'usage de la Géométrie de position, exemple d'ailleurs particulièrement important pour les études mathématico-techniques. Si je reviens aujourd'hui sur le même sujet, c'est que j'ai à rendre compte de certains développements obtenus récemment et bien dignes de l'attention du monde savant : je veux parler des ouvrages du savant anglais M. R.-St. Ball, l'astronome de Dublin.

(*) Cette Notice a paru, en allemand, dans la *Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturforsch. Gesellschaft*, vol. XXI, p. 186 et suivantes; elle avait été le texte d'une leçon semestrale faite, en 1876, aux élèves de la 6e section de l'École Polytechnique fédérale.

Je vais énumérer ici ces ouvrages, une fois pour toutes.

Après un exemple préliminaire, traité dans un Mémoire intitulé : « On the small oscillations of a rigid body about a fixed point under the action of any forces, etc. » *Transact. of the R. Ir. Acad.*, vol. XXIV, 1870, p. 598 ; M. R.-St. Ball publia : « The theory of screws », *ibid.*, vol. XXV, nov. 1871, p. 137-217, où sont établis les principes fondamentaux de la nouvelle doctrine ; puis il donna, dans le même recueil, un travail intitulé : « Screw coordinates and their applications to problems in the dynamics of a rigid body », vol. XXV, janv. 1874, p. 259-327.

Vinrent ensuite les Mémoires suivants :

« Researches on the dynamics of a rigid body by the aid of theory of screws », *Philosoph. Transactions*, vol. CLXIV, p. 15-40, 1874.

A sketch in the theory of screws; Problems in the mechanics of a rigid body which has three degrees of freedom », Hermathena : « A series of papers of litterature, Science and Philosophy, by Members of Trinity College, Dublin », n° II, 1874, p. 506-519.

Et enfin, en un volume in-8° de 13 feuilles : « The theory of screws. A study in the dynamics of a rigid body », Dublin, 1876, qui constitue le résumé final de toute cette théorie et dont l'auteur lui-même a rendu compte dans le volume IX des *Matematische Annalen*, p. 541-553.

I. Il ne saurait échapper à aucun lecteur attentif aux récentes productions sur cette matière que la manière de traiter scientifiquement la Mécanique ne se soit modifiée, en ces derniers temps, dans le sens d'une recherche plus curieuse de la *représentation géométrique* en général, comme aussi, en particulier, dans celui d'une étude plus approfondie des parties à proprement parler géométriques de cette science. Il n'est guère de nouvel ouvrage d'enseignement, tant soit peu remarquable, qui ne témoigne, à nouveau, de cette tendance (*voir* spécialement l'Ouvrage si substantiel de M. W. Schell, intitulé : « Theorie der Bewegung und der Kräfte », Leipzig, 1870). Ce sont les innovations glorieuses de MM. Chasles, Poinsot et Möbius qui s'imposent, de haute lutte, à l'acceptation universelle.

Ce mouvement pourtant ne put que par sa liaison avec la nouvelle Géométrie de la ligne droite, telle que l'a instituée Plücker depuis 1865, aboutir à une conclusion systématique. On sait que Plucker lui-même

a fait suivre son grand Traité : « On a new Geometry of space », publié dans les *Philos. Trans.* de 1865, p. 725-791, d'un plus petit intitulé : « Fondamental views regarding mechanics », *Philos. Trans.*, p. 361-380, 1866; et en effet, c'est en développant ce qu'il n'avait fait qu'indiquer là, vaguement et en rattachant systématiquement, entre elles, les conséquences qu'il y avait énoncées, que l'on est parvenu aujourd'hui à un résultat véritablement satisfaisant. Le livre cité plus haut, de M. R.-S. Ball, peut, à bon droit, passer pour le nouveau Traité de Mécanique auquel Plucker faisait allusion, à la fin de son dernier Ouvrage.

Ce développement a pris naissance au siècle dernier, dans les recherches géométriques de d'Alembert et d'Euler sur le mouvement d'un système de forme invariable à trois dimensions (recherches qui, d'abord en 1749 et 1750, portèrent sur un déplacement *infiniment petit* et conduisirent à la découverte de l'axe instantané de rotation ; puis, en 1775 et 1780, s'appliquèrent à un déplacement *fini* autour d'un point fixe et firent reconnaître qu'un tel déplacement équivaut à une rotation autour d'un axe passant par ce point fixe), ou encore dans un Traité publié en 1763 par Giulio Mozzi sous le titre de : « Discorso matematico sopra il rotamento momentanei dei corpi ». Là, en effet, pour la première fois, on s'était appliqué à étendre, au cas de l'espace à trois dimensions, la notion du centre instantané de rotation d'un système de forme invariable situé dans un plan, déjà utilisée par Descartes et démontrée en toute généralité par Jean Bernoulli en 1742. Reprenant à son tour ces recherches, M. Chasles établit le premier, en 1830, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIV, p. 322, que *le mouvement hélicoïdal est la forme canonique du mouvement d'un système de forme invariable*, et revint encore plus tard sur ce théorème, pour en donner la démonstration géométrique rigoureuse dans son « Aperçu historique », Note XXXIV, p. 408 et suiv., et mieux encore dans les *Comptes rendus* de 1843, t. XVI, p. 1420, et dans ceux de 1860 et 1861, t. LI, p. 855 et suiv., et t. LII, p. 77 et suiv.

Ces travaux ont donné naissance, jusqu'en ces derniers temps, à une série de commentaires démonstratifs de MM. de Jonquières, Laguerre, Mannheim, Brisse, etc., mais ils trouvent leur expression la plus complète et la plus simple : à un point de vue dans le *système focal*

ou le *complexe linéaire* et, à un autre, dans une *forme spéciale de la collinéation des espaces*.

Le *premier cas* se présente lorsqu'il s'agit d'amener le système de forme invariable d'une première position dans une seconde. Ce passage peut s'effectuer d'une infinité de manières par des rotations successives autour de deux axes rectilignes conjugués. De tels axes de rotation conjugués sont des droites qui se correspondent dans la réciprocité involutoire du système focal. Les droites qui sont, à elles-mêmes, leurs correspondantes (et toutes les transversales de ces couples conjugués le sont) constituent le complexe linéaire correspondant, dans lequel par chaque point passent une infinité de rayons contenus dans un plan, et dans chaque plan se trouvent une infinité de rayons passant par un même point (*plan focal* ou *nullebene* du point et *foyer* ou *nullpunkt* du plan). Aux droites d'une certaine direction correspondent des droites à l'infini, appartenant aux combinaisons de rotation et de translation au moyen desquelles s'accomplit le passage de l'une à l'autre position ; à l'*une* de ces droites, celle qui se nomme, soit l'*axe central du mouvement*, soit l'*axe du système focal ou du complexe*, correspond enfin la position de ses plans normaux, c'est-à-dire que l'on a à combiner une rotation autour de cette droite avec un glissement de celle-ci sur elle-même, combinaison d'où résulte précisément le *mouvement hélicoïdal* capable d'amener le système de son ancienne position à sa nouvelle et qui est la *forme canonique du mouvement*. Que l'on parte de la considération, soit du système focal, soit du complexe linéaire, on est conduit, avec une égale simplicité, à reconnaître les dépendances métriques des foyers des plans et des plans focaux des divers points de l'espace, ainsi que des couples de droites conjuguées de l'axe central ; comme aussi la signification de ces éléments, pour les différentes phases du mouvement : du plan focal du point comme du plan normal de sa trajectoire, des droites conjuguées à elles-mêmes, ou droites du complexe, comme des droites de l'espace dont les points se meuvent suivant leurs propres normales.

Le paramètre du complexe linéaire, la seule constante qui figure dans l'équation de ce complexe rapporté à son axe (*voir* mon ouvrage « Darstell. Geom. », art. 170) apparaîtra, plus loin, avec une double signification mécanique.

Le *second cas*, celui où il convient de considérer les *espaces collinéaires sous la forme particulière de la congruence*, se manifeste quand il s'agit des deux positions du système de forme invariable envisagées en elles-mêmes et dans leur connexion purement géométrique. Le tétraèdre des quatre points et plans qui sont à eux-mêmes leurs correspondants dégénère de telle sorte que, de six arêtes, une seule, comme *axe central*, reste réelle et à distance finie, à savoir celle qui porte deux ponctuelles et faisceaux de plans de même sens et dont, par suite, les points qui se correspondent à eux-mêmes se trouvent réunis en leur point à l'infini, tandis que les plans qui se correspondent à eux-mêmes sont imaginaires et tangents au cercle sphérique imaginaire infiniment éloigné. Ce dernier se correspond à lui-même, parce qu'*une sphère demeure* encore *une sphère après le mouvement;* tandis que ses points peuvent être considérés comme disposés par couples se correspondant projectivement, en sorte que deux d'entre eux, dont les tangentes se coupent à l'infini sur l'axe central, se correspondent à eux-mêmes et représentent ainsi des arêtes doubles du tétraèdre considéré; alors la ligne qui joint ces deux points devient la sixième arête de ce tétraèdre, et, en conséquence, le plan à l'infini lui fournit son seul couple de plans réels. Les lignes qui joignent les couples de points conjugués et les intersections des couples de plans conjugués forment un seul et même complexe tétraédral.

Soient trois couples de points des deux espaces, AA', BB' et CC', les points milieux M_a, M_b et M_c des droites AA', BB' et CC' et les droites M_bM_c ou m_a, respectivement m_b et m_c; puis encore les plans N_a, N_b N_c, normaux, respectivement, aux droites AA', BB' et CC', en leurs points milieux, et les intersections N_bN_c ou n_a, respectivement n_b et n_c de ces plans. On obtient l'axe central, soit par trois de ses normales, à savoir les normales communes des couples $m_a\,n_a$, $m_b\,n_b$ et $m_c\,n_c$ (et cette construction demeure applicable dans le cas d'un mouvement infiniment petit comme dans celui où les déplacements de A, B et C ne sont connus qu'en *direction*), soit en formant, avec un point O comme sommet commun, les parallélogrammes OAA'A*, OBB'B* et OCC'C*, projetant orthogonalement les triangles ABC, A'B'C' sur le plan A*B*C* puis élevant au point central de leurs projections, c'est-à-dire à l'intersection des perpendiculaires menées, en leurs milieux, aux

cordes qui en joignent les sommets correspondants, la normale à ce plan $A^*B^*C^*$.

II. Continuant à nous occuper du mouvement *infiniment petit* d'un système de forme invariable, nous dirons qu'il peut être défini comme un *mouvement hélicoïdal* ou une *torsion* et se trouve déterminé, savoir :

Par son *axe*, une certaine droite de l'espace ;

Par un *paramètre linéaire p*, adjoint à cet axe et indiquant la grandeur de la translation, suivant cette droite, qui répond à la rotation de l'angle unité, quand cet angle est exprimé en fraction de l'arc ; ce paramètre peut être désigné sous le nom de *flèche* de la torsion ou de l'hélice ;

Enfin, par l'angle de rotation α' ou l'*amplitude,* laquelle, précisément, peut être imaginée infiniment petite.

On le voit, le mouvement d'un système de forme invariable exige, pour sa détermination, *six grandeurs algébriques,* dont quatre servent à fixer la position de l'axe ; pendant que la cinquième définit l'hélice, et la sixième, la torsion ou mouvement hélicoïdal. La cinquième de ces grandeurs, la flèche, est nulle dans le cas d'une rotation simple, et infinie dans celui d'une translation simple.

D'autres considérations peuvent encore conduire aux mêmes résultats à l'égard des conditions nécessaires à la détermination d'un système de forme invariable. Ainsi, par exemple, des déductions purement géométriques ont amené M. Mannheim, au cours de ses études sur cette théorie, à énoncer :

Que *six* conditions, telles que la position d'un point sur une surface donnée, *fixent* un pareil système ;

Que *cinq* lui permettent un mouvement *déterminé*, dans lequel chaque point, en général, décrit une trajectoire ou un élément de courbe ;

Que *quatre* comportent une *infinité simple* de mouvements, tels qu'à chaque point, en général, répond, comme lieu du faisceau de ses trajectoires possibles, une surface trajectoire ;

Et que *trois,* enfin, sont compatibles avec une *infinité double* de mouvements, tels qu'à chaque point, en général, correspond un pinceau de trajectoires.

En outre, dans son « Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable », *Recueil des Mémoires des Savants étrangers,* t. XX et

Journal de l'École Polytechnique, Cah. XLIII, 1868-1870, M. Mannheim a donné les deux importantes propositions ci-après énoncées.

1. Dans le cas du mouvement d'indétermination *simplement* infinie, il existe *deux lignes droites* aux points desquelles répondent, non pas des surfaces trajectoires, mais bien de simples trajectoires, à savoir : aux points de l'une de ces droites, des rotations simples autour de l'autre. Ces droites jouissent, par suite, de la propriété d'être rencontrées par les normales aux surfaces trajectoires de tous les points du système (propriété déjà annoncée en 1866, dans le tome XI du *Journal de Mathématiques*), et se trouvent ainsi déterminées par les normales aux surfaces trajectoires de quatre points donnés, comme étant leurs transversales communes. L'analogie est évidente avec le cas du mouvement dans un plan, où les normales aux trajectoires de tous les points passent par le centre instantané, et avec celui du mouvement déterminé dans l'espace, où les plans normaux aux trajectoires des points d'un plan se rencontrent au point focal de ce dernier.

2. Dans le cas du mouvement d'indétermination *doublement* infinie, il existe un *hyperboloïde à une nappe*, lieu des points qui, quel que soit le mouvement du système, ne peuvent se mouvoir que suivant les rayons d'un faisceau et non suivant ceux d'un pinceau.

Ces résultats ont été retrouvés par M. Ball, comme des cas particuliers de théorèmes généraux, dans ses recherches relatives aux mouvements doués du *second* ou du *troisième degré de liberté* ; et, en particulier, l'hyperboloïde de la deuxième proposition précitée avait déjà, avant M. Mannheim, fait son apparition dans les travaux de Plucker sur le groupe à trois membres de complexes linéaires.

Géométriquement, M. Mannheim a fait un usage excellent de la première de ces propositions dans son « Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces », *Journal de Mathématiques*, t. XVII, 1872. Il y donne, très-complète, la théorie géométrique du *pinceau de droites infiniment mince*, c'est-à-dire de la congruence de rayons engendrée par une droite dans le mouvement d'indétermination simplement infini, et se sert pour cela, essentiellement, d'un procédé d'étude graphique de l'élément de surface gauche, que j'ai coutume de développer, dans la théorie des surfaces réglées, comme une simple

application des propriétés des plans H′ (*D. Geom.*, art. 46, 3, 4; art. 49, 5), et qui, par suite, est indiqué à l'endroit cité (p. 753, dans une Note se rapportant à la page 415, 6). M. MANNHEIM conclut ensuite, de l'hypothèse que les rayons de la congruence sont des normales de la même surface courbe, à la réalité nécessaire des deux droites qu'il a signalées et déduit, de cette même hypothèse, la *théorie de la courbure des surfaces*. (*Voir* aussi, dans le *Journal de Mathématiques*, t. XVII, p. 406, l'ingénieux travail du même auteur : « Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes » et, dans les *Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 372, 852, 928, ses Notes sur le théorème de MEUSNIER et sur le contact de troisième ordre de deux surfaces.)

Le même éminent géomètre a aussi fait des recherches sur les *trajectoires* que suivent les points séparés d'une droite, pendant le mouvement déterminé de celle-ci (*Comptes rendus*, mars 1873), et sur les *surfaces trajectoires* des points d'un système de forme invariable animé d'un mouvement d'indétermination simplement infinie, sous quatre conditions (*Recueil des Savants étrangers*, t. XXII), et a donné, à ce sujet, d'intéressants résultats, qu'il est aisé d'établir et, çà et là, de compléter. Ils constituent l'extension des théorèmes sur le mouvement des droites dans un plan, d'après lesquels les tangentes des trajectoires des points de ces droites enveloppent une parabole, pendant que leurs centres de courbure décrivent une section conique; en sorte que les points d'intersection de cette dernière avec la droite considérée seraient des points pour les trajectoires desquels le cercle de courbure serait de rayon nul, c'est-à-dire des points aux repos, comme il ne s'en peut rencontrer que sur les droites imaginaires dirigées, du centre instantané du plan, vers les points circulaires imaginaires à l'infini. Il convient de faire remarquer, à ce propos, que le théorème sur la distribution des centres de courbure dans les sections coniques a été donné comme dû à M. RIVALS, et péniblement établi au moyen de l'analyse, par M. BRESSE, dans le XXXVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, mais qu'il peut être, d'une manière très-directe, démontré par la Géométrie. Les tangentes des *trajectoires* des points d'une droite engendrent, dans l'espace, un paraboloïde hyperbolique, dont l'un des plans directeurs est normal à sa droite conjuguée ; en conséquence, les plans osculateurs de ces trajectoires engendrent la développable d'une parabole cubique ;

leurs axes de courbure, un hyperboloïde; leurs centres de courbure, une courbe à double courbure du cinquième ordre; les centres de leurs sphères osculatrices, une courbe à double courbure de troisième ordre, etc. Enfin, ceux d'entre les points de l'espace qui forment, sur leurs trajectoires, des points d'inflexion, sont situés sur une surface imaginaire du quatrième ordre ayant pour courbe double réelle la parabole, qui, d'après M. Resal, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIIe Cahier, p. 344, contient les points d'accélération normale nulle. Les autres points, auxquels correspondent des plans osculateurs stationnaires des trajectoires, c'est-à-dire, selon la terminologie de Cinématique française, les points à suraccélération binormale nulle, figurent une surface du troisième ordre; en sorte qu'il existe, en général, trois droites dont tous les points jouissent de cette propriété et que cette propriété appartient à tous les points d'une droite, dès que quatre d'entre eux la possèdent, etc. Par contre, les normales des *surfaces trajectoires* des points d'une droite forment un hyperboloïde et cet hyperboloïde admettant, en général, deux génératrices perpendiculaires à la droite considérée, il existe sur cette dernière deux points dont les surfaces trajectoires la touchent elle-même, etc. Ici entrent en scène, outre les paraboloïdes et les hyperboloïdes, des courbes à double courbure du troisième, du sixième ordre, des surfaces réglées du quatrième et du sixième degré, des surfaces gauches du troisième, du huitième ordre: tout un attirail, en un mot, d'outils précieux pour l'exploration géométrique approfondie du champ de la Cinématique. Un exemple: les points de l'espace qui, au cours d'un mouvement assujetti à quatre conditions, décrivent des trajectoires tangentes à une ligne asymptotique de la surface trajectoire correspondante, sont situés sur une surface du troisième ordre qui contient les deux axes des rotations simples; il y a donc, dans l'espace, au moins *une* droite réelle dont *tous* les points se meuvent suivant des éléments des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires. On cherche, d'une manière analogue, les points de l'espace se mouvant suivant des lignes de courbure, comme aussi ceux dont les surfaces trajectoires présentent des conditions de courbure particulières.

Lorsque la *mobilité d'un point, en tous sens*, est douée du troisième degré de liberté, sa mobilité *sur une surface* douée du second et, *sur*

une courbe, du premier, il se trouve, suivant une remarque déjà faite, que le *système de forme invariable* ou le corps solide jouit tout au plus d'une *liberté du mouvement du sixième degré ;* cette propriété est accusée aussi bien par la décomposition connue du mouvement général en trois translations simultanées suivant trois axes rectangulaires et trois rotations, également simultanées, autour de ces mêmes axes, que par ce théorème de Möbius, aux termes duquel un corps qui peut tourner autour de six axes, indépendants entre eux, peut prendre tous les mouvements imaginables («Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen », dans le *Journal de Crelle,* vol. XVIII, 1838, p. 189); il y a *liberté pour une sextuple infinité de torsions ou pour des torsions suivant un système hélicoïdal à six dimensions*. Dans le premier cas de la décomposition élémentaire, trois des torsions composantes ont la flèche nulle et les trois autres l'ont infinie. Et l'on voit facilement qu'en astreignant un ou plusieurs points à décrire une surface ou une courbe convenable, on peut, mais seulement sous des formes spéciales, restreindre la liberté du mouvement dans les limites de l'un quelconque des degrés inférieurs au sixième : par exemple, dans celles du premier degré, sous la forme particulière de la rotation, en immobilisant deux points ou en en assujettissant cinq à se mouvoir sur des surfaces fixes, etc. ; dans celles du troisième, de même particulièrement, en fixant un point ou en en assujettissant trois à parcourir des surfaces déterminées, etc. Mais il importe de faire spécialement remarquer que *la liberté de mouvement du cinquième degré ou suivant un système hélicoïdal à cinq dimensions, dans sa forme la plus générale,* peut être obtenue par l'emploi de ce mécanisme si simple que l'on connaît sous le nom de *joint universel* ou *clef de Hoocke*. Que l'on suppose l'un des cylindres d'un tel appareil taillé en forme de vis et l'écrou de cette vis invariablement lié à un système rigide, puis son autre cylindre rattaché, par un deuxième joint universel, à un axe fixe : le système rigide considéré jouira d'une liberté de mouvement du cinquième degré absolument générale.

III. Le moment est venu de parler des *forces considérées comme les causes du mouvement* et de rappeler que Poinsot, dans son Traité de 1804 « Sur la composition des moments et la composition des aires », que l'on trouve dans le tome VI, XIIIe Cahier du *Journal de l'École*

Polytechnique, 1806, a démontré que tout *système de forces,* dans l'espace à trois dimensions, peut être, *d'une seule manière,* mis sous une *forme canonique,* c'est-à-dire réduit à une force unique et à un couple agissant dans un plan normal à cette force ; puis aussi, que cet *axe central du système de forces* se distingue par cette propriété que le couple résultant qui lui correspond a pour moment axial le plus petit de ceux qui lui appartiennent (p. 193 du même Mémoire). Il convient d'ajouter encore que, dans le substantiel chapitre VI du I[er] volume de son « Lehrbuch der Statik », 1837, et dans le X[e] volume du *Journal de Crelle,* Möbius a traité de la même théorie et exposé de profondes recherches sur la réciprocité géométrique qu'elle fait apparaître, à savoir le système focal précédemment considéré ; et enfin que M. Cremona a fondé la théorie du *polygone des forces* et du *polygone funiculaire,* dans la Statique graphique, sur la projection orthogonale de figures réciproques dans le système focal, suivant l'axe de ce système ou l'axe central.

La forme canonique du système de forces et celle du mouvement des corps solides sont, on l'a pu remarquer, *absolument identiques ;* et cela non-seulement en ce sens que force unique et translation, couple et rotation, se répondent respectivement et que le même nombre de données sont nécessaires à la détermination, soit de celle-là (le *torseur*), soit de celle-ci (la *torsion*), à savoir pour le torseur :

Quatre grandeurs qui déterminent la ligne d'action de la force unique ;

Un paramètre linéaire p, la *flèche,* qui exprime le quotient du moment du couple par la force unique (combiné avec celles-là, il détermine une vis, comme précédemment) ;

Et l'intensité α'' de la force ;

Mais encore, au point de vue des relations géométriques qu'ont ces deux formes avec les produits d'autres décompositions, tels que couples de forces uniques obliques entre elles, axes de rotations conjugués, etc. : toutes propriétés qu'exprime également, pour les deux, le système focal ou le complexe linéaire.

Or, à cette identité répond, et on l'a vite aperçu, une nouvelle manière de traiter, non-seulement la Cinématique et la Statique, mais aussi la Dynamique des systèmes invariables.

M. Battaglini a entrepris une exposition de ce genre avec le secours des coordonnées tétraédrales et de la Géométrie linéaire, dans une série de traités relatifs au mouvement des systèmes invariables, à la composition des forces, aux moments simples et moments d'inertie et aux dynames en involution (1869-71, *Giornale di Matematiche*, vol. X et XI, p. 133, 175, 181, 207, 295; 62, 359 ou années 1872, 1873). Les travaux sur la Géométrie linéaire de M. F. Klein, publiés dans les *Math. Annalen*, vol. II, p. 198 et 366, 1869, et vol. IV, p. 403, 1871, ont ensuite apporté d'importants perfectionnements à la théorie basée sur ces nouvelles considérations. D'un autre côté, M. Everett (*Messenger of Mathematics*, new series, n° 39, 45, 53; 1874-1875) a employé à ces recherches la méthode des *quaternions* et son travail, qu'une étroite affinité, tant des idées fondamentales que des résultats, rattache à ceux de M. Ball, desquels je rendrai compte plus en détail, forme à ces derniers comme une adjonction naturelle. M. Clifford aussi, dans son Mémoire « On biquaternions », s'est placé au même point de vue, ainsi que je l'ai déjà expressément signalé dans les citations de la dernière édition allemande de la *Analyt. Geom. des Raumes* d'après M. G. Salmon, vol. II, p. 682. M. Lindemann, enfin (*Mathem. Annalen*, vol. VII, p. 56), a étudié les mouvements infiniment petits des corps solides, dans le cas d'une détermination de mesure projective générale, et les modifications correspondantes des lois de M. Chasles et de Möbius; puis aussi, développé des extensions de la théorie que M. Ball également avait, pour le cas de la détermination de mesure ordinaire, découvertes indépendamment des résultats entièrement connus. Toutefois, pour ne pas m'éloigner, dans ce qui va suivre, de la Mécanique proprement dite, je laisserai de côté l'extension à la détermination de *mesure* générale, ainsi qu'aux variétés à n dimensions.

IV. M'en tenant à cette Mécanique, je supposerai d'abord que, pendant la recherche, le système solide ne s'écarte qu'infiniment peu de sa position initiale, et ne soit soumis qu'à des forces qui, pour une même position, soient de même grandeur; et ensuite, que toute production continue de travail ou d'énergie y soit impossible.

La première de ces hypothèses exclut la considération de forces telles que celles d'un milieu résistant et du frottement; la seconde restreint l'étude au cas de forces existant dans la nature. Cette dernière s'accorde,

en l'état présent de nos connaissances, avec l'hypothèse de la détermination de mesure ordinaire. Toutes deux font du système considéré un système *dynamique conservateur*, suivant l'expression technique actuellement consacrée.

La *composition* des mouvements, c'est-à-dire des *torsions*, et des systèmes de forces, c'est-à-dire des *torseurs*, en torsions ou torseurs résultants, est, naturellement, le *premier* des problèmes à résoudre, et le premier résultat capital de cette étude est l'*accord* des règles de la composition pour les deux cas. Il résulte de la détermination de la quantité de travail développée pendant le déplacement du système, ou pendant une torsion déterminée par rapport à un système de forces donné ou à un torseur, que ce travail est la somme de ceux des forces composantes dans les mouvements composants et qu'il s'exprime par le produit d'une certaine fonction symétrique, le *coefficient virtuel* ω_{12}, des grandeurs géométriques qui déterminent les deux vis, par l'intensité α'' du torseur et par l'amplitude α' de la torsion, soit par

$$\alpha'_1 \alpha''_2 \omega_{12} \quad \text{ou} \quad \alpha'_1 \alpha''_2 [(p_1 + p_2)\cos\lambda - d\sin\lambda],$$

expression où d désigne la plus courte distance et λ l'angle des axes des deux vis, et p_1, p_2 les flèches correspondantes.

Ce travail est donc nul, c'est-à-dire que le système qui n'est capable que de la torsion autour de la vis 1 demeure en repos sous l'action d'un torseur suivant la vis 2, ou que les deux vis considérées sont *réciproques*, quand ω_{12} s'annule, c'est-à-dire quand

$$p_1 + p_2 = d \operatorname{tang} \lambda,$$

et en particulier lorsque $d = 0$ ou $\lambda = 0$ pour $p_1 + p_2 = 0$ et lorsque $\lambda = 90^\circ$ pour $d = 0$.

Deux vis à flèche infinie sont encore réciproques, parce qu'un couple de forces ne saurait mouvoir un corps qui n'est capable que d'un déplacement par translation, et les vis à flèche infinie ou nulle sont réciproques à elles-mêmes. La première de ces proportions résulte de ce qui précède, la seconde de ce que, les deux vis étant identiques, le travail est égal à $2p\alpha'_1\alpha''_2$. La condition générale de la réciprocité est une

relation de position des deux vis ou *des complexes linéaires qu'elles représentent;* M. F. Klein l'a désignée sous le nom d'*involution* (*Math. Annalen*, vol. II, p. 366. Le coefficient virtuel est l'invariant simultané des deux complexes linéaires considérés dans ce Mémoire) et exprimée géométriquement par cette propriété que les couples des foyers des plans d'un faisceau qui a pour arête un rayon commun aux deux complexes forment sur ce rayon une involution ayant pour points doubles ses intersections avec les directrices de la congruence de tous les rayons communs. Cette condition consistant en *une seule* relation, et *cinq* données étant nécessaires pour déterminer une vis, il existe, de vis réciproques :

Pour *cinq* vis données, un nombre déterminé, par le fait une seule ;

Pour *quatre*, un système d'infinité simple, c'est-à-dire une surface réglée ;

Pour *trois*, une congruence ;

Pour *deux*, un complexe ;

Et pour *une*, un système d'infinité quadruple ou à quatre dimensions, à savoir: sur chaque droite de l'espace, une vis réciproque à la vis donnée et dont la flèche se détermine par l'évanouissement du coefficient virtuel. Les vis réciproques de flèche donnée forment un faisceau passant par un point ou situé dans un plan; celles de flèche nulle forment le plan focal (*nullebene*) ou le foyer (*nullpunkt*) de la théorie de Möbius.

Il est clair que, pour chaque degré de liberté du système, la *réaction des conditions* ou *résistances* qui restreignent sa mobilité fait naître ou représente un *torseur suivant l'une des vis réciproques à ce système*, et, en outre, que la *condition de l'équilibre* consiste simplement en ceci, que les forces agissantes constituent un torseur suivant l'une de ces vis.

Comme maintenant, pour les *torsions* autour des vis 1, 2 et 3, avec des amplitudes α'_1, α'_2, α_3, qui se *neutralisent entre elles*, c'est-à-dire dont chacune est égale et directement opposée à la résultante des deux autres, la somme de leurs travaux contre un torseur quelconque, je veux dire suivant la vis i et avec l'intensité α''_1, doit être nulle, on a, pour la condition de cette neutralisation et identiquement pour tous les i l'égalité

$$\alpha'_1 \varpi_{1i} + \alpha'_2 \varpi_{2i} + \alpha''_3 \varpi_{3i} = 0,$$

et de même, pour *trois torseurs qui se font équilibre*, on a identiquement pour tous les i

$$\alpha''_1 \omega_{1i} + \alpha''_2 \omega_{2i} + \alpha''_3 \omega_{3i} = 0.$$

Au moyen de trois vis déterminées i, on élimine *dans le premier cas* les amplitudes, *dans le second* les intensités et, obtenant *dans les deux* cas la même relation entre les déterminations géométriques des vis 1, 2, 3, on en conclut que *les mêmes lois régissent la composition des torsions et celle des torseurs*. Mais le problème même de la *composition de deux torsions* ou de *deux torseurs* se résout par une *surface réglée gauche du troisième degré* que l'on trouve, pour la première fois, dans Plucker, *Philos. Transact.*, vol. CLV, p. 756, formule (88), 1865, et *Neue Geometrie des Raumes*, p. 97, formule (143), et que Cayley a nommée *cylindroïde*. Si, en effet, il s'effectue respectivement autour de deux vis 1, 2, se coupant à angle droit, situées en x, y et de flèches p_1, p_2, des torsions d'amplitude $\theta' \cos\lambda$ et $\theta' \sin\lambda$, l'axe de rotation résultant θ, auquel correspond l'amplitude θ', est défini par les équations

$$z = \sin\lambda \cos\lambda (p_1 - p_2),$$

où z représente la distance de cet axe au plan xy, et

$$y = x \operatorname{tang}\lambda.$$

La composante, suivant cet axe de rotation résultant, de la translation a pour expression

$$\theta' (p_1 \cos^2\lambda + p_2 \sin^2\lambda).$$

La torsion résultante a la direction déterminée par λ et pour flèche

$$p = p_1 \cos^2\lambda + p_2 \sin^2\lambda,$$

quantité proportionnelle, ainsi, à l'inverse du carré du rayon de même direction d'une conique $p_1 x^2 + p_2 y^2 = \rho$.

L'axe de cette torsion est situé sur la surface conoïde cubique

$$z(x^2 + y^2) = (p_1 - p_2)xy,$$

qui contient les axes x et y simplement et l'axe z doublement, et que les plans bissecteurs $x = \pm z$ (*Darstell. Geom.*, art. 46, 3; 49, 5) coupent suivant des ellipses congruentes dont le rapport des axes est $\sqrt{2}$, dont les projections sur xy sont les cercles égaux

$$[x \mp \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2)]^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}(p_1 - p_2)^2,$$

se touchant en O, ayant leurs centres aux points $\pm \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$ de l'axe des x et, respectivement, symétriques ou, par superposition, congruentes aux projections des mêmes ellipses sur xz.

En conséquence, les projections sur xy des génératrices forment un faisceau de droites rayonnant autour du point O; parmi ces droites, celles qui ont même projection sur xz répondent aux couples d'une involution ayant son pôle dans la direction des x et, par suite, ses rayons doubles sur les lignes à 45 degrés (voir *Darstell. Geom.*, art. 114) qui appartiennent aux *génératrices singulières* de la surface, lesquelles affectent entre elles, dans le sens des z, l'écartement maximum $(p_1 - p_2)$.

Que je mentionne maintenant que Plucker a obtenu à l'endroit cité cette surface comme le lieu des axes de tous les complexes linéaires d'un système linéaire d'infinité simple, c'est-à-dire de premier degré, ou d'un faisceau de complexes, et l'on verra, en se reportant aussi à ce qui précède, que cela correspond exactement au résultat trouvé pour la composition des torsions et torseurs; on en conclura que deux vis déterminent le cylindroïde, ce qui, par le fait, se vérifie aisément, et l'on reconnaîtra que la résultante de deux torsions ou torseurs suivant ces vis doit appartenir à cette surface et être déterminée par sa seule direction. En effet, soient i, k, l trois vis du même cylindroïde, qui aient pour angles de direction $\lambda_{i'}$, $\lambda_{k'}$, $\lambda_{l'}$, et autour desquelles des torsions d'amplitudes α'_i, α'_k, α'_l se neutralisent; il faudra que les angles de rotation résultants, aussi bien que les translations, soient nuls, c'est-à-dire que, pour cette double raison,

les équations

$$\alpha'_i \cos\lambda_i + \alpha'_k \cos\lambda_k + \alpha'_l \cos\lambda_l = 0,$$
$$\alpha'_i \sin\lambda_i + \alpha'_k \sin\lambda_k + \alpha'_l \sin\lambda_l = 0$$

se vérifient, ou que l'on ait

$$\alpha'_i : \alpha'_k : \alpha'_l = \sin(\lambda_k - \lambda_l) : \sin(\lambda_l - \lambda_i) : \sin(\lambda_i - \lambda_k).$$

Or cela n'est autre chose que la *règle de la composition des torsions et torseurs au moyen du cylindroïde*, laquelle correspond au parallélogramme des forces et des vitesses, etc., de la Mécanique élémentaire et comprend, en vérité, tout cela comme cas particulier. Elle fournit l'axe et l'amplitude, et la section conique précitée donne la flèche correspondante. Lorsque cette section conique est une hyperbole, les deux vis du système parallèles à ses asymptotes ont une flèche nulle, c'est-à-dire qu'à leurs axes correspondent, comme l'a découvert M. Mannheim, des *rotations simples* comme torsions ou des *forces uniques* comme torseurs. En général, à chaque point P répond un plan trajectoire, qui est normal à l'intersection des deux plans que détermine P avec les vis de flèche nulle. Il est évident que les lois du polygone fermé des torseurs qui se font équilibre et des torsions qui se neutralisent subsistent complétement. Cela prouve que le torseur et la torsion correspondent au système de points, tout comme la force unique et la trajectoire au point unique.

V. Le cylindroïde résout aussi les *questions relatives à la réciprocité*, telle qu'elle a été définie plus haut. Il faut remarquer tout d'abord, à cet effet, qu'une vis réciproque à *deux* autres α_i, α_k l'est nécessairement aussi à toutes les vis du cylindroïde que déterminent, ensemble, ces deux-là; cela résulte de ce que chaque vis de ce cylindroïde peut être considérée comme la résultante de composantes dirigées suivant α_i, α_k. Comme, d'autre part, une droite quelconque de l'espace coupe le cylindroïde en trois points et rencontre en chacun de ces points une vis du système de vis de seconde espèce, qui représente cette surface, il faut, pour que cette droite soit l'axe d'une vis réciproque au cylindroïde, que, pour elle et ces trois vis, l'une ou l'autre forme particulière de la condition de réciprocité pour $d = 0$ soit satisfaite. Il faut donc que la vis réciproque soit normale à l'une des trois vis et que la somme de sa

flèche et de la flèche de chacune des deux autres fasse zéro. Aucune autre solution n'est possible, parce que, d'une part, la normale commune à deux vis du cylindroïde ne peut être que la droite double de cette surface et que, d'autre part, en raison de la symétrie des axes des coniques, la même flèche $p_1 \cos^2\lambda + p_2 \sin_2\lambda$ répond aux directions λ et $(\pi - \lambda)$. On obtient donc les *axes des vis passant par un point donné et réciproques à un cylindroïde,* c'est-à-dire à deux vis données, en abaissant, de ce point, des perpendiculaires sur les génératrices de ce cylindroïde. En vertu des propriétés métriques spéciales de cette surface, chacune de ces perpendiculaires rencontre encore deux vis, symétriques par rapport aux axes x et y, et dès lors dotées de flèches égales; et c'est la flèche de ces dernières, prise avec un signe contraire, qu'il faut attribuer à la normale considérée, pour la rendre réciproque au cylindroïde. Mais les droites, ainsi déterminées par un point P, forment un cône du second degré, parce que :

D'abord, la projection xy de la courbe de leurs pieds sur les génératrices de la surface est évidemment un cercle,

Et ensuite, un cylindre circulaire contenant la droite double du cylindroïde ne peut couper celui-ci en dehors de cette ligne double et des génératrices allant du point à l'infini de cette dernière aux points circulaires du plan xy, que suivant une ellipse qui est précisément le lieu des pieds de ces normales.

Ce cône, si le point P est pris sur le cylindroïde, se décompose en deux plans : le plan normal à la génératrice du point et celui qui passe par la génératrice de même flèche du cylindroïde. Il est enfin évident que l'on peut, en général, trouver directement le plan de sa base elliptique sur la surface; car elle contient, d'une part, le pied Q, sur le cylindroïde, de la parallèle menée par P à la droite double et, d'autre part, une génératrice rectiligne de cette surface, à savoir celle qui a même flèche que celle passant par Q. Cette génératrice coupe l'ellipse en deux points, dont l'un est situé sur la droite double, et dont l'autre est à la fois le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur elle et le point de contact de son plan avec le cylindroïde. On trouve non moins aisément que les réciproques d'un cylindroïde situées dans un plan quelconque sont tangentes à une conique qui, en réalité, est une parabole. *Les vis réciproques à un cylindroïde forment donc un complexe*

du deuxième degré et toutes les flèches afférentes au cylindroïde reviennent, dans leur ordre, aux vis de chaque cône complexe et de chaque conique complexe de ce cylindroïde.

Ces résultats conduisent facilement à ceux-ci, que *les vis d'un cylindroïde sont réciproques à quatre vis prises à volonté*, et qu'*à cinq vis arbitrairement choisies il n'existe qu'une seule réciproque*.

Dans le premier cas, en effet, il faut que les réciproques soient en nombre simplement infini, c'est-à-dire constituent une *surface*. Or, si l'on désigne par 1, 2, 3 et 4 les quatre vis, ordonnées suivant les grandeurs décroissantes de leurs flèches, puis que l'on choisisse une flèche entre les deux moyennes, il existera sur chacun des cylindroïdes (1, 3) et (2, 4) deux vis ayant cette flèche, et les deux transversales communes à ces quatre vis, prises elles-mêmes comme vis avec une flèche égale et de signe contraire, détermineront un cylindroïde dont toutes les vis seront réciproques à 1, 2, 3 et 4, parce que ces transversales le sont aux cylindroïdes donnés et, par suite, à ces quatre vis.

Dans le second cas, il ne peut exister qu'un *groupe* de vis, et, comme déjà deux fourniraient tout un cylindroïde ou un système d'infinité simple, il ne peut exister qu'une *seule* vis réciproque à cinq autres données. Cela prouve, en même temps, que dans tout cylindroïde il existe toujours *une* et *une seule* vis réciproque à une autre arbitrairement choisie.

VI. L'étude des réciproques donne le moyen d'*instituer le système de coordonnées* le mieux approprié à ces recherches. En Mécanique élémentaire, on décompose, par analogie avec la décomposition du mouvement général, un système de forces en trois forces uniques, dirigées suivant trois droites concourantes rectangulaires, et en trois couples situés dans les plans normaux à ces droites; puis, on utilise comme coordonnées de ce système de forces les produits de sa décomposition. De même ici, pour répondre à cette conception plus générale, on devra procéder à une décomposition du torseur ou de la torsion suivant six vis données et considérer, comme les coordonnées de celle-ci ou de celui-là, les intensités ou les amplitudes afférentes à ces six vis (*voir* le Traité de Plucker de 1866, p. 362).

Si la vis ρ d'intensité ρ'' représente un torseur à décomposer suivant les vis fondamentales $w_1, \ldots, w_6$, les intensités correspondantes $\rho''_1, \ldots \rho''_6$

se déterminent d'après cette remarque qu'une torsion suivant une vis quelconque σ doit produire le même travail suivant ρ que suivant toutes les composantes ensemble ; d'où l'équation

$$\rho'' \omega_{\rho\sigma} = \rho''_1 \omega_{1\sigma} + \rho''_2 \omega_{2\sigma} + \ldots + \rho''_6 \omega_{6\sigma},$$

dans laquelle $\omega_{\rho\sigma}$ représente le coefficient virtuel de σ par rapport à ρ et $\omega_{1\sigma}, \ldots$ celui de σ par rapport à $w_1, \ldots$.

Six vis arbitrairement choisies fournissent ainsi six équations linéaires au moyen desquelles se déterminent les *coordonnées* ρ''_i. Dans le cas où σ est réciproque aux vis fondamentales $w_2, \ldots, w_6$, l'équation correspondante donne directement ρ''_1, parce que, tous les autres termes du second membre s'évanouissant, elle se réduit à

$$\rho'' \omega_{\rho\sigma} = \rho''_1 \omega_{1\sigma}.$$

Si p désigne la flèche de la vis ρ et p_i les flèches respectives des vis fondamentales w_i, on obtient, en faisant coïncider σ successivement avec chacune de ces dernières et se souvenant que le coefficient virtuel d'une vis par rapport à elle-même est le double de sa flèche, les équations

$$\begin{array}{l}
\rho'' \omega_{\rho_1} = \rho''_1 p_1 + \rho''_2 \omega_{2,1} + \ldots + \rho''_6 \omega_{6,1}, \\
\rho'' \omega_{\rho_1} = \rho''_1 \omega_{1,2} + \rho''_2 p_2 + \ldots + \rho''_6 \omega_{6,2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\rho'' \omega_{\rho_6} = \rho''_1 \omega_{1,6} + \rho''_2 \omega_{2,6} + \ldots + \rho''_6 p_6,
\end{array}$$

et en faisant coïncider σ avec ρ, l'équation

$$\rho'' p_\rho = \rho''_1 \omega_{1\rho} + \rho''_2 \omega_{2,5} + \ldots + \rho''_6 \omega_{6,5}.$$

Multipliant cette dernière par ρ'', puis y substituant les précédentes, on arrive à l'équation

$$\rho''^2 p_\rho = p_1 \rho_1''^2 + \ldots + p_6 \rho_6''^2 + 2(\rho''_1 \rho''_2 \omega_{1,2} + \ldots + \rho''_5 \rho''_6 \omega_{5,6}),$$

qui détermine l'*intensité de la résultante en fonction de celles des composantes*.

Maintenant il est possible, par un choix convenable des vis fondamentales, de faire disparaître de cette équation les quinze doubles produits. Soient, en effet, w_1 pris à volonté ; w_2 dans le système d'infinité quadruple de ses réciproques ; w_3 dans le complexe des réciproques à w_1, w_2 ; w_4 dans le système d'infinité double ou la congruence des réciproques à w_1, w_2, w_3 ; w_5 dans le cylindroïde des réciproques à w_1, w_2, w_3, w_4 et enfin w_6 comme la réciproque à $w_1, \ldots, w_5$. Les vis fondamentales sont alors, deux à deux, réciproques entre elles, c'est-à-dire forment un *système de coréciprocales*, et quinze des trente conditions nécessaires à la détermination de six vis sont fixées. Cela étant, les coefficients virtuels des vis fondamentales, ajoutés deux à deux, s'évanouissent ; d'où l'équation

$$\rho''^2 p_\rho = p_1 \rho_1''^2 + \ldots + p_6 \rho_6''^2.$$

Et si le travail produit, par rapport à un torseur β d'intensité β'', par une torsion d'intensité α'' effectuée autour de α, est en général la somme des trente-six quantités de travail composantes, trente de celles-ci s'évanouissent en vertu des suppositions qui précèdent, et l'expression du *travail* en question est simplement

$$2(p_1 \alpha_1' \beta_1'' + \ldots + p_6 \alpha_6' \beta_6'').$$

Mais

$$\alpha_i' = \alpha' \alpha_i, \quad \beta_i'' = \beta'' \beta_i ;$$

donc l'expression précédente équivaut à

$$2\alpha' \beta'' (p_1 \alpha_1 \beta_1 + \ldots + p_6 \alpha_6 \beta_6)$$

et, par suite, le coefficient virtuel de α et β est donné par la formule

$$\omega_{\alpha\beta} = p_1 \alpha_1 \beta_1 + \ldots + p_6 \alpha_6 \beta_6.$$

De même que pour le cas particulier de l'identité des vis α et β, la flèche est donnée par la suivante :

$$p_\alpha = p_1 \alpha_1^2 + \ldots + p_6 \alpha_6^2.$$

Le travail produit, par rapport à un torseur α d'intensité *un*, par une torsion d'amplitude w'_1 effectuée autour de w_1, est $2w'_1\omega_{\alpha_1}$ et, comme il doit égaler le travail fourni par la même torsion par rapport à un torseur w_1 d'intensité α_1, on a

$$2p_1\alpha_1 w'_1 = 2w'_1\omega_{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = \frac{\omega_{\alpha_1}}{p_1}.$$

La coordonnée se trouve ainsi *exprimée au moyen du coefficient virtuel.*

On peut appeler *coordonnées de* α les intensités de la composante α_i du torseur d'intensité *un* agissant en α, et l'on obtient alors la *relation métrique qui existe entre ces coordonnées,* relation qui est nécessaire à la détermination des *grandeurs absolues,* en menant par l'origine des coordonnées x, y, z des parallèles définies par les cosinus de direction a_i, b_i, c_i, aux vis fondamentales $w_1, \ldots, w_6$. Alors, en effet, il faut que

$$(a_1\alpha_1 + \ldots + a_6\alpha_6)^2 + (b_1\alpha_1 + \ldots + b_6\alpha_6)^2 + (c_1\alpha_1 + \ldots + c_6\alpha_6)^2 = 1.$$

ou que

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_6^2 + 2[\alpha_1\alpha_2\cos(w_1, w_2) + \ldots] = 1.$$

Au moyen de cette relation se détermine, par exemple, la vis ρ réciproque à cinq autres α, β, γ, δ, ε, car les équations de condition

$$\Sigma p_i\rho_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma p_i\rho_i\beta_i = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma p_i\rho_i\varepsilon_i = 0$$

fournissent les rapports de leurs coordonnées.

VII. Tels sont les *fondements* de la Mécanique des corps solides, sous sa nouvelle forme. Il convient de rappeler que ce mode d'expression si simple, tiré de la considération du système coréciprocal des six vis fondamentales, avait déjà été indiqué également, dans des recherches de Géométrie linéaire, notamment par M. F. Klein dans son Traité « Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades », dans les *Mathem. Annalen*, vol. II, p. 203 f. (*voir* aussi *ibid.*, p. 370).

L'*achèvement de l'édifice* nécessite l'*introduction des masses* dans les *mouvements* et les *systèmes de forces* qui les produisent; aussi ne crois-je

pas pouvoir clore cette exposition sans donner encore une idée de ce nouveau sujet. Je serai toutefois sur ce point aussi bref que possible, afin de pouvoir ensuite exposer, dans ce qu'elle offre de plus essentiel, la solution d'un cas déterminé.

On sait que, des deux conceptions fondamentales de la *Géométrie des masses*, appellation que l'on peut, à bon droit, attribuer à cette partie de la Mécanique, l'une répond à la translation, l'autre à la rotation. La première, le *centre de la masse*, nommé souvent à tort son *centre de gravité*, est le point dont la distance à un plan quelconque est la moyenne de celles de tous les points de la masse à ce plan ; ses coordonnées sont définies par les équations

$$x\Sigma m_i = \Sigma m_i x_i, \; \ldots .$$

La seconde, le *rayon d'inertie* R, mesure la distance de l'axe de rotation à laquelle il faudrait concentrer, en un point, la masse du système, pour qu'elle eût autour de cet axe la même *énergie cinétique de rotation* que ce système lui-même ; il résulte de l'équation

$$R^2 \Sigma m_i = \Sigma m_i r_i^2 .$$

On connaît la représentation géométrique de cette dernière grandeur, c'est-à-dire du partage des masses au point de vue de la rotation autour d'axes concourants, par l'*ellipsoïde d'inertie* de Poinsot, lequel, pour le point central des masses O, est nommé *ellipsoïde central* et dont alors les trois axes a, b, c sont dits les *axes principaux* du point ou du système.

On connaît encore le théorème de Binet, d'après lequel les axes principaux et rayons d'inertie principaux pour un point quelconque du système se déduisent de ceux relatifs au centre des masses. Enfin il est connu que les axes principaux sont des *axes permanents de rotation* pour un système tournant autour d'un point, et que ceux qui correspondent au point central des masses O sont des axes *naturels* de rotation d'un système libre ; cette dernière proposition est vraie, soit qu'aucune force n'agisse sur le système, soit que les forces agissantes se réduisent à un couple situé dans un plan normal à l'axe.

Cela posé, il est aisé, en s'en référant aux considérations précédemment développées, de prouver que les axes principaux du système OA, OB, OC, considérés comme des vis $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$, dotées, respectivement, des flèches $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, constituent un système coréciprocal et sont, dès lors, propres à être utilisés comme vis fondamentales, pour la détermination des coordonnées, et de montrer aussi, à titre de généralisation de ce qui vient d'être rappelé en dernier lieu, que, pour un système libre, tout torseur impulsif agissant suivant l'une de ces vis détermine une torsion autour de cette même vis, en sorte qu'elles peuvent être appelées les *six vis d'inertie principales du système*.

En général, un torseur suivant la vis β fait naître une torsion du système autour d'une autre vis α, selon la relation

$$\beta_i = \frac{\alpha'}{\beta''} \frac{M}{\iota} p_i \alpha_i,$$

entre leurs coordonnées respectives et les flèches des vis fondamentales.

Si, maintenant, les torseurs β, β^* déterminent, de cette façon, des torsions α, α^* et que α soit réciproque à β^*, α^* l'est aussi, nécessairement, à β et cela aussi bien pour le système libre que pour un système réduit, par certaines conditions, à un moindre degré de liberté. La condition y relative, en effet, s'exprime ainsi

$$p_1^2 \alpha_1 \alpha_1^* + \ldots + p_6^2 \alpha_6 \alpha_6^* = 0.$$

J'appellerai vis *matériellement conjuguées* les vis de cette sorte, que M. Ball, dans son Mémoire de Londres de 1874, nommait : « conjugate screws of inertia » et au sujet desquelles, partant de cette remarque que, pour tout système gêné dans sa liberté par certaines conditions, il correspond, à chaque vis de la torsion momentanée, non pas une vis unique et déterminée, mais tout un système de vis suivant *chacune* desquelles peut agir le torseur impulsif déterminant, il démontrait que, dans le système de vis du degré k qui définit la mobilité du système rigide, il y a toujours et seulement k vis (*les k vis d'inertie principales du système*) qui sont, deux à deux, matériellement conjuguées.

Dans le cas de la liberté du second degré, par exemple, celui où le système peut se tordre suivant deux vis et suivant toutes celles qui résultent de ces deux-là, c'est-à-dire toutes celles de leur cylindroïde, trois vis du cylindroïde, suivant lesquelles agissent des torseurs, et les vis correspondantes, suivant lesquelles le système est tordu, déterminent, par leurs directions, deux séries projectives dont les points doubles ne sont autre chose que les directions des deux vis principales d'inertie.

VIII. Que, maintenant, le système rigide se torde autour d'une vis α avec la vitesse α' ; ce mouvement se décomposera, suivant les vis fondamentales w_i, avec des vitesses de torsion $\alpha'\alpha_i$, et des vitesses de translation $\alpha'\alpha_i p_i$ et l'énergie cinétique du système se composera des deux termes

$$\tfrac{1}{2}\alpha'^2\alpha_i^2\int r^2 dM \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}M\alpha'^2\alpha_i^2 p_i^2,$$

ou, comme p_i est précisément le rayon d'inertie correspondant, des deux suivants :

$$\tfrac{1}{2}M\alpha'^2\alpha_i^2 p_i^2 \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}M\alpha'^2\alpha_i^2 p^2{}_i.$$

dont la somme est, en définitive,

$$M\alpha'^2(\alpha_1^2 p_1^2 + \ldots + \alpha_6^2 p_6^2) \quad \text{ou} \quad M\alpha'^2 u_\alpha^2,$$

u_α étant un *paramètre linéaire qui dépend de la distribution de la masse du système, par rapport à l'axe* α.

Le torseur β, d'intensité β'', agissant pendant l'élément de temps τ sur le système de masse M qui ne peut se tordre qu'autour de la vis α, lui imprime une vitesse α' et une énergie cinétique K, déterminées par les équations

$$\alpha' = \frac{\tau\beta''\omega_{\alpha\beta}}{M u_\alpha^2},$$

$$K = \frac{\tau\beta''^2\omega_{\alpha\beta}^2}{M u_\alpha^2}.$$

Comparant ces résultats avec ceux relatifs au système absolument libre, on retrouve ce théorème, connu depuis Euler, que *de toute restriction résulte nécessairement une perte d'énergie.*

Dans un système de vis d'espèce k, il est toujours possible de trouver k vis coréciprocales; $(k-1)$ vis, en effet, du système, étant considérées, il en existe toujours, dans ce même système, une autre qui leur est réciproque, comme l'étant à $(6-k)$ vis du système réciproque, soit, en tout, à cinq vis. On obtient donc, comme *système de coordonnées approprié à la liberté d'espèce k*, une *décomposition* de chaque torseur suivant ces k vis et suivant $(6-k)$ vis quelconques du système réciprocal, et, les composantes dirigées suivant ces dernières se trouvant *détruites* par l'effet des restrictions imposées au système, il advient que les composantes dirigées suivant les k vis du système se composent seules en un torseur résultant, appartenant au système lui-même, et que l'on nomme le *torseur réduit* du torseur donné.

Pour le groupe des k vis principales d'inertie, en particulier, et à la condition que les valeurs du paramètre u_α qui leur correspondent soient u_i $(i = 1 \ldots k)$, on obtient, entre les coordonnées β_i du torseur réduit et les coordonnées α_i de la vis autour de laquelle s'effectue la torsion produite par ce torseur réduit et par tous les autres torseurs impulsifs auxquels il répond, la relation

$$\frac{\alpha_i' u_i^2}{p_i} = \frac{\tau}{M} \beta_i'' .$$

On exprime aussi la condition pour que deux vis α, α' soient conjuguées, sous la forme

$$u_1^2 \alpha_1 \alpha_1' + \ldots + u_k^2 \alpha_k \alpha_k' = 0.$$

et l'énergie cinétique K du mouvement sous la suivante :

$$K = M u_\alpha^2 \quad \text{avec} \quad u_\alpha^2 = u_1^2 \alpha_1'^2 + \ldots + u_k^2 \alpha_k'^2 .$$

Dans le cas particulier du cylindroïde ou de la liberté de deuxième espèce, on a

$$u_\alpha^2 = u_1^2 \alpha_1^2 + u_2^2 \alpha_2^2,$$

et la représentation géométrique de u_α est une *ellipse*, dont les dia-

mètres sont inversement proportionnels aux u_α des parallèles α, tandis que ses diamètres conjugués ont les directions de vis matériellement conjuguées et que ses axes fournissent les vis d'énergie cinétique maxima ou minima pour une vitesse de torsion donnée. De plus, les deux vis du cylindroïde parallèles au couple de diamètres conjugués commun à cette ellipse et à la conique flèche sont les vis principales d'inertie du système. Cette *ellipse d'inertie* ou *ellipse d'égale énergie cinétique* est, dans la théorie générale des systèmes doués de la liberté du second degré, l'analogue d'un ellipsoïde, ordinairement nommé l'*ellipsoïde d'inertie*, dont on sait la signification dans la théorie de la rotation autour d'un point, et dont je reparlerai plus loin, à propos de la théorie générale du système doué de la liberté du troisième degré.

IX. J'en reviens au *cas général* du système de vis de degré k.

Je suppose que, sous l'action d'un système de forces, le système rigide passe, au moyen d'une torsion d'amplitude α' effectuée autour d'une de ses vis α, de la position d'équilibre A à la position voisine B et dépense, dans ce mouvement, l'énergie V_α, ou *énergie potentielle du déplacement*, laquelle doit nécessairement dépendre des coordonnées de la torsion de A en B et des constantes du système de forces, comme étant fonction des k coordonnées $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$, et fonction homogène du deuxième degré, parce que l'on y peut négliger les puissances plus hautes de ces coordonnées devant leurs secondes puissances, et que les termes linéaires disparaissent dès qu'il s'agit de la sortie d'une *position d'équilibre*. Par l'effet du transport dans la position B, l'équilibre est détruit et un torseur créé autour de la vis β, dont les coordonnées $\beta''_1, \ldots, \beta''_k$ se déduisent de la formule

$$\beta''_i = -\frac{1}{2p_i}\frac{dV_\alpha}{d\alpha_i}.$$

Si, de cette manière, aux torsions autour de α, α^*, correspondent les torseurs réduits β, β^*, la réciprocité de α et β^* sera une conséquence nécessaire de celle de α^* et β; pour ces deux réciprocités, en effet, et dans la seule hypothèse que V_α soit de la forme

$$A_{11}\alpha'^2_1 + \ldots + 2A_{12}\alpha'_1\alpha'_2 + \ldots + 2A_{1k}\alpha'_1\alpha'_k + \ldots,$$

la condition est la même et s'écrit

$$A_{11}\alpha'_1\alpha''_1 + \ldots + A_{12}(\alpha'_1\alpha''_2 + \alpha''_2\alpha'_2) + \ldots = 0.$$

Les vis α, α'', pour lesquelles elle est remplie, sont dites *potentiellement conjuguées* et l'on démontre immédiatement qu'il existe, dans un système de vis du degré k, toujours et seulement k vis telles, qu'une torsion effectuée autour de l'une d'elles donne naissance à un torseur réduit dirigé *suivant elle-même*. En effet, cette propriété s'exprime par les équations de condition

$$\alpha_i = -\frac{1}{2p_i}\frac{dV_\alpha}{d\alpha_i} = -\frac{1}{2p_i}(A_{i1}\alpha'_1 + A_{i2}\alpha'_2 + \ldots + A_{ik}\alpha'_k),$$

ou, en raison de ce que $\alpha''_i = \alpha''\alpha_i$ et $\alpha'_i = \alpha'\alpha_i$,

$$\alpha''\alpha_i p_i = -\alpha'(A_{i1}\alpha_1 + \ldots + A_{ik}\alpha_k),$$

qui ne sont compatibles que si le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} A_{11} + \frac{\alpha''}{\alpha'}p_i & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{12} & A_{22} + \frac{\alpha''}{\alpha'}p_2 & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1k} & A_{2k} & \ldots & A_{kk} + \frac{\alpha''}{\alpha'}p_k \end{vmatrix}$$

s'annule. Or, l'équation obtenue en égalant ce déterminant à zéro fournit, pour le rapport $\frac{\alpha''}{\alpha'}$, k valeurs toujours réelles dont chacune, portée dans les équations de condition, détermine les *coordonnées d'une vis* qui jouit de la propriété énoncée.

On trouve ainsi les *k vis potentielles principales* du système. Elles forment un groupe coréciprocal unique par rapport auquel, si on le prend pour fondamental, le travail V_α, produit par une torsion d'amplitude α' autour de α, est donné par la formule

$$V_\alpha = \alpha'^2(A_{11}\alpha_1^2 + \ldots + 2A_{12}\alpha_1\alpha_2 + \ldots),$$

que l'on peut changer en la suivante :

$$V_\alpha = \alpha'^2 F v_\alpha^2,$$

en représentant par F une constante directement proportionnelle à la masse et inversement proportionnelle au carré du temps, et par v_α un *paramètre linéaire appartenant à la vis α sous l'influence de la fonction* V, et s'adjoignant, comme troisième, au paramètre purement géométrique p_α et au paramètre u_α, qui dépend de la distribution de la masse du système par rapport à la vis α.

Les vis potentielles principales étant prises pour fondamentales et leurs paramètres v ayant pour valeurs respectives $v_1, \ldots, v_k$, *l'énergie potentielle du déplacement s'exprime par une somme de carrés*

$$F(\alpha_1'^2 v_1^2 + \ldots + \alpha_1^2 v_k^2),$$

et cette expression lui demeure pour chaque groupe de k vis potentiellement conjuguées.

On obtient, enfin, un dernier groupe important de k vis du système en considérant, à la fois, les deux vis β et β^* de ce système qui, par rapport à une autre de ses vis α se trouvent dans les situations suivantes : β est la vis suivant laquelle un torseur doit agir, sur le système en repos, pour lui imprimer un mouvement de torsion autour de α ; β^* est celle suivant laquelle agit, sur ce système, le torseur réduit auquel donne naissance la torsion, autour de α, qui s'effectue à partir d'une position d'équilibre. La première ne dépend que du corps solide et de l'ensemble des mouvements qui lui sont permis; la seconde dépend, de plus, du système de forces agissant.

Or on peut prouver qu'il y a, toujours et seulement, k vis α, dans le système, pour lesquelles les vis β et β^*, qui leur sont liées comme il vient d'être dit, coïncident. En effet, d'après ce qui précède, cette condition exige la coexistence des k équations de condition

$$h\frac{u_i^2}{p_i}\alpha_i'' = -\frac{1}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha_i} \quad \text{ou} \quad hu_i^2\alpha''\alpha_i = -(A_{11}\alpha_1 + \ldots)\alpha',$$

c'est-à-dire la nullité du déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} A_{11} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_1^2 & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{12} & A_{22} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_2^2 & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{kk} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_k^2 \end{vmatrix}.$$

Or l'équation qui exprime cette nullité fournit, pour $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$, k valeurs toujours réelles et, par là, au moyen du système des équations de condition, k vis de l'espèce demandée.

Ces vis sont, à la fois, matériellement et potentiellement conjuguées, et M. Ball, sur la proposition de M. R. Townsend, les a désignées sous le nom de *vis harmoniques*. Je ferai remarquer que, pour un système hélicoïdal du deuxième degré, le paramètre $v_\alpha = \alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2$ conduit à une *ellipse potentielle*, comme à la courbe dont les diamètres conjugués sont parallèles à des vis potentiellement conjuguées, etc. Les couples de diamètres conjugués communs à cette ellipse et à la conique flèche ou à l'ellipse d'inertie du système fournissent les vis potentielles principales et les vis harmoniques de ce système.

X. Muni de tous ces moyens, on arrive, enfin, à l'établissement des *équations différentielles* générales *de la dynamique des systèmes invariables* et à une solution nette du problème cinétique général (*voir*, par exemple, Poisson, *Mécanique*, t. II, Chap. IX, Sect. II, ou Duhamel, t. II, art. 206-218).

Le corps est supposé en mouvement sous l'influence des forces, en sorte qu'au bout du temps t les coordonnées de son mouvement de torsion, rapportées aux k vis d'inertie principales, soient les $\frac{d\alpha_i'}{dt}\cdot$ Si, alors, β_i'' désigne les coordonnées d'un torseur qui, en agissant pendant le court espace de temps τ sur le corps en repos, lui aurait imprimé le même mouvement, les coordonnées du torseur impulsif qui, dans le temps τ, déterminerait, en partant de l'état de repos, le mouvement du temps $t + \tau$, seront $\beta_i'' + \tau\frac{d\beta_i''}{dt}\cdot$ D'autre part, le mouvement au temps $t + \tau$ peut être regardé comme produit par l'action, d'abord du torseur β_i'' pendant le temps τ, et ensuite du torseur engendré pendant le

même temps et dont les coordonnées sont $-\frac{1}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha''_i}$; en sorte que l'on a

$$\beta''_i + \tau\frac{d\beta''_i}{dt} = \beta''_i - \frac{1}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha_i}.$$

Maintenant de l'équation

$$\tau\beta''_i = \mathrm{M}\frac{u_i^2}{p_i}\frac{d\alpha'_i}{dt}$$

on peut déduire

$$\tau\frac{d\beta''_i}{dt} = \mathrm{M}\frac{u_i^2}{p_i}\frac{d^2\alpha'_i}{dt^2},$$

et l'on obtient les équations générales du problème ($i = 1.2\ldots k$) sous la forme

$$2\mathrm{M}u_i^2\frac{d^2\alpha'_i}{dt^2} + \frac{dV}{d\alpha'_i} = 0$$

(*voir* THOMSON et TAIT, *Natural Philosophy*, vol. I, art. 329, 330).

Pour les intégrer, on pose

$$\alpha'_i = f_i\Omega,$$

où Ω désigne une fonction inconnue du temps et les f_i des constantes; puis, introduisant V, on obtient le système

$$\mathrm{M}u_1^2 f_1\frac{d^2\Omega}{dt^2} + (\mathrm{A}_{11}f_1 + \mathrm{A}_{12}f_2 + \ldots + \mathrm{A}_{1k}f_k)\Omega = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{M}u_k^2 f_k\frac{d^2\Omega}{dt^2} + (\mathrm{A}_{k1}f_1 + \mathrm{A}_{k2}f_2 + \ldots + \mathrm{A}_{kk}f_k)\Omega = 0,$$

lequel se réduit à l'équation unique

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{h}{\mathrm{M}}\frac{\alpha''}{\alpha'}\Omega = 0;$$

admettant l'intégrale

$$\Omega = \mathrm{H}\sin(st + c),$$

si l'on tire les quantités $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$ et les f_i des k équations suivantes :

$$f_1\left(\mathrm{A}_{11} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_1^2\right) + f_2\mathrm{A}_{12} + \ldots + f_k\mathrm{A}_{1k} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_1\mathrm{A}_{k1} + f_2\mathrm{A}_{k2} + \ldots + f_k\left(\mathrm{A}_{kk} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_k^2\right) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède, *si les f_i sont proportionnels aux coordonnées d'une vis harmonique.*

Si l'on représente par f_{ij} la valeur de f_j qui résulte de l'emploi de la $i^{ème}$ racine de l'équation de degré k en $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$, les solutions générales deviennent

$$\alpha'_i = f_{1i} H_1 \sin(s_1 t + c_1) + \ldots + f_{ki} H_k \sin(s_k t + c_k).$$

Elles contiennent $2k$ constantes à déterminer au moyen de l'état initial et admettent, en même temps, d'après les considérations précédentes, l'*interprétation* très-simple que voici :

Que l'on suppose la torsion qui a écarté le corps de sa position d'équilibre stable et le mouvement de torsion qui a été alors imprimé à ce corps, décomposés en leurs k composantes suivant les vis harmoniques; que l'on conçoive k pendules circulaires respectivement isochrones à ces composantes; que l'on imagine, ensuite, tous ces pendules mis en mouvement, en même temps que le corps, avec des amplitudes et des vitesses angulaires respectivement proportionnelles aux amplitudes initiales et vitesses des torsions des vis harmoniques correspondantes; que l'on détermine, enfin, pour le moment donné, les arcs des k pendules, de manière à donner au corps, à partir de sa position d'équilibre, les torsions correspondantes autour des vis harmoniques, et l'on obtiendra la position correspondante du corps.

XI. Je veux, en dernier lieu, examiner de plus près le *cas particulier* où *le corps est libre de subir des torsions autour de toutes les vis d'un système de troisième espèce,* et dans lequel, par suite, le système réciproque est de même nature que le premier, parce que tous deux sont déterminés par $3(6-3)$ ou neuf conditions. La disposition des vis des deux systèmes en une infinité simple de *groupes de même flèche* fournit immédiatement ce théorème, que chacun de ces groupes constitue l'*un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde,* dont l'autre comprend les vis de flèche égale et de signe contraire du système réciproque.

Ces hyperboloïdes forment un *système concentrique, coaxial et concyclique,* et il est aisé de démontrer que l'hyperboloïde des vis de flèche nulle qui, d'après M. MANNHEIM, est le lieu des points auxquels

répondent, dans le *mouvement d'indétermination doublement infinie,* non des gerbes, mais des *faisceaux de trajectoires* et, d'après PLUCKER, *Neue Geom. d. R.*, p. 130, celui des droites communes à trois complexes linéaires ayant leurs axes sur les axes de coordonnées et pour paramètres p_1, p_2, p_3, a pour équation

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_1 p_2 p_3 = 0,$$

p_1, p_2 et p_3 étant les flèches qui dans le système appartiennent respectivement à ses axes principaux ; et que les vis de flèche p appartiennent à l'hyperboloïde

$$(p_1 - p)x^2 + (p_2 - p)y^2 + (p_3 - p)z^2 + (p_1 - p)(p_2 - p)(p_3 - p) = 0.$$

L'hyperboloïde de flèche nulle détermine, en même temps, les *flèches de toutes les vis du système,* comme proportionnelles à l'inverse du carré de ceux de ses diamètres qui leur sont parallèles. En effet, des équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_1 p_2 p_3 = 0,$$
$$(p_1 - p)x^2 + (p_2 - p)y^2 + (p_3 - p)z^2 + (p_1 - p)(p_2 - p)(p_3 - p) = 0,$$

il suit que

$$pr^2 = - p_1 p_2 p_3,$$

comme PLUCKER (à l'endroit cité, p. 132) l'a également énoncé pour les paramètres des complexes du groupe à trois membres, système hélicoïdal du troisième degré.

Ainsi, dans la détermination de cet hyperboloïde, l'*hyperboloïde flèche,* se trouve comprise celle de tout le système et de son réciproque, comme il est disposé, par là, de ses neuf constantes. On voit que, par chaque point de l'espace fini, il passe *trois* vis du système et *une seule* par chaque point à l'infini ; tandis que chaque plan de l'espace en contient *deux* et qu'en conséquence les vis du système parallèles à un plan forment un cylindroïde et celles parallèles aux sections circulaires réelles en particulier, des faisceaux plans de droites, issues de deux points de l'axe primaire. La construction de tout cela ne présente aucune difficulté spéciale.

La signification de l'hyperboloïde flèche, duquel chaque *triple* de diamètres conjugués fournit spécialement les directions de trois vis coréciprocales du système, peut encore être éclaircie par la remarque suivante :

La condition de l'équilibre sous l'action de la pesanteur tend à ce que la ligne verticale (*schwerlinie*) qui contient le centre de la masse appartienne au groupe des vis réciproques de l'hyperboloïde flèche, ou à ce que les restrictions ou résistances soient compatibles avec la rotation du systeme autour d'une droite déterminée passant par ce même centre, à savoir l'autre génératrice correspondante de l'hyperboloïde flèche.

Dans le cas de la *rotation autour d'un point fixe*, où le système hélicoïdal des mouvements possibles est une gerbe de flèche nulle, l'hyperboloïde flèche devient illusoire. Alors, en effet, l'expression du paramètre des masses

$$u_\alpha^2 = u_1^2\alpha_1^2 + u_2^2\alpha_2^2 + u_3^2\alpha_3^2$$

est géométriquement représentée par un *ellipsoïde*, dont les inverses des carrés des rayons sont proportionnels aux énergies cinétiques du corps relatives à une torsion de vitesse donnée, autour des vis parallèles du système, ou dont les rayons sont proportionnels aux vitesses de torsion que doit prendre le corps, autour des vis du système respectivement parallèles, pour avoir l'énergie cinétique *un*. Cet *ellipsoïde* est celui d'*égale énergie cinétique ;* ses triples de diamètres conjugués sont parallèles à des vis d'inertie conjuguées du système et dans le cas de la rotation du corps autour d'un point, il devient l'*ellipsoïde*, bien connu, des *moments*. Le triple des directions conjuguées, qui lui est commun avec l'hyperboloïde flèche, appartient aux *vis principales d'inertie* du système, lesquelles, dans le cas de la rotation autour d'un point, deviennent les *axes principaux du corps ;* un torseur dirigé suivant l'une d'elles et agissant avec une grande intensité, mais pendant un temps très-court, imprime au corps une torsion autour de cette même vis. D'une façon générale, on obtient la vis du mouvement momentané, correspondant à un pareil torseur impulsif, au moyen de cette remarque que les vis du système réciproques à celle du torseur forment comme réciproques à quatre vis, un cylindroïde et sont dès

lors parallèles à un plan. La direction qui lui est conjuguée dans l'ellipsoïde d'égale énergie cinétique appartient à la vis momentanée cherchée. Dans le cas spécial de la rotation autour d'un point, cela revient à la construction connue de Poinsot.

XII. De même, d'après l'équation

$$v_\alpha^2 = v_1^2 \alpha_1^2 + v_2^2 \alpha_2^2 + v_3^2 \alpha_3^2,$$

on obtient, comme représentation géométrique du paramètre potentiel v_α, un *ellipsoïde* dit d'*égale énergie potentielle*, qui fournit pour chaque vis du système, au moyen du rayon qui lui est parallèle et en raison de ce que ce rayon est proportionnel à cette amplitude, la petite amplitude de la torsion pendant laquelle est développé, sous l'action des forces extérieures, le travail *un*, dont le triple de directions conjuguées fait partie des vis potentiellement conjuguées du système et qui enfin, associé à l'hyperboloïde flèche, conduit, à peu près comme le précédent ellipsoïde servait à la construction de la vis momentanée, à la détermination de la vis de rétrogradation, c'est-à-dire de la vis du torseur créé par un déplacement donné. Enfin, le seul triple de directions conjuguées qui soit commun aux deux ellipsoïdes d'égale énergie appartient aux *trois vis harmoniques* du système ; les petites oscillations du corps résultent de la composition d'oscillations harmoniques simples effectuées autour de ces vis ; un déplacement initial suivant l'une d'elles détermine de petites oscillations de torsion autour de cette même vis et un déplacement initial sur une vis du cylindroïde défini par deux d'entre elles fait que la vis des moments du mouvement du système oscille sur ce cylindroïde, sans jamais s'en détacher.

Dans le cas très-particulier de la *rotation autour d'un point, sous l'influence de la pesanteur, l'ellipsoïde potentiel* devient un *cylindre de rotation* ayant pour axe la ligne verticale (*schwerlinie*) passant par le centre de la masse ; cette ligne est l'une des trois vis harmoniques, et les deux autres sont les vis focales du couple commun de diamètres conjugués situé dans le plan diamétral, conjugué à la première, de l'ellipsoïde des moments. En conséquence, les plans verticaux menés par les deux axes harmoniques se coupent à angle droit.

Ce qui précède me paraît donner des résultats obtenus sur le terrain

où je me suis placé, une idée suffisamment nette pour que je m'abstienne de me livrer ici à de nouveaux développements. J'y trouverais pourtant ample matière, tant au point de vue des *sujets de problèmes* à traiter, tels que l'étude approfondie des cas où le système jouit d'une liberté d'espèce quatre ou cinq, ou encore d'une liberté entière, questions qui n'ont même pas été touchées, dans cette Notice, et de ceux de l'équilibre des forces, sur lesquels on connaît tant de propositions remarquables (*voir* le Mémoire de M. R. Sturm, dans les *Annali di Matem.*, 2ᵉ série, t. VII), qu'à celui des *moyens de recherche* que j'y emploierais. Il est évident que, particulièrement, les complexes de rayons du second degré doivent jouer souvent un rôle important dans ces recherches ; j'en citerai, pour un seul exemple, les deux complexes répondant aux équations

$$\Sigma u_i^2 \alpha_i^2 = 0, \quad \Sigma v_i^2 \alpha_i^2 = 0,$$

et désignés respectivement, par MM. F. Klein et Ball, sous les noms de *complexes cinétique* et *potentiel*. On conçoit aisément pourquoi il ne pouvait convenir de les considérer ici.

Je tiens à mentionner, en terminant, que le choix de termes convenables pour la germanisation [1] de la terminologie de M. Ball m'a coûté quelque effort ; il importait particulièrement d'en trouver ou d'en former de courts et de précis pour rendre les mots anglais : *twist, wrench, pitch,* etc. Ceux que j'ai choisis me paraissent dignes au moins d'être sérieusement discutés. Quant à traduire, comme je crois me rappeler qu'on l'a déjà fait, *twist* par *drillung* [2], je n'ai pu m'y résoudre.

Je ne doute pas que ces méthodes ne reçoivent encore de nouveaux perfectionnements et ne deviennent toujours plus fécondes. C'est pourquoi j'ai jugé nécessaire de les présenter, à de futurs professeurs de Mécanique, dès leurs premiers pas hors des recherches cinématogéométriques et linéogéométriques. A ce point de vue, la présente Notice sera, j'espère, de quelque utilité.

---

[1] Il est à peine besoin d'ajouter ici que le traducteur français a rencontré, à son tour, les mêmes difficultés.

[2] Rotation.

Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0$;

PAR M. WORMS DE ROMILLY,

Ingénieur des Mines.

Considérons les quatre intégrales définies suivantes :

$$\varphi(x, \mu) = \int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\sin^\mu\omega\, d\omega,$$

$$\theta(x, \mu) = \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^\mu\omega\, d\omega,$$

$$\psi(x, \mu) = \int_0^\pi \sin(x\sin\omega)\cos^\mu\omega\, d\omega,$$

$$\tau(x, \mu) = \int_0^\pi \cos(x\sin\omega)\cos^\mu\omega\, d\omega.$$

Remplaçons dans les deux premières $\sin^\mu\omega$ par $\sin^{\mu-2k}\omega(1-\cos^2\omega)^k$, et dans les deux autres $\cos^\mu\omega$ par $\cos^{\mu-2k}\omega(1-\sin^2\omega)^k$, et développons les binômes, nous obtiendrons, pour les quatre fonctions, des relations analogues à

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, \mu) &= \int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-2k}\omega \\ &\quad \left[1 - \frac{k\cos^2\omega}{1} + \frac{k(k-1)}{1.2}\cos^4\omega \ldots\right] d\omega. \end{aligned} \right.$$

Différentions $2n$ fois, par rapport à x, la fonction φ, il vient

$$\frac{d^{2n}\varphi(x,\mu)}{dx^{2n}} = (-1)\int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\sin^\mu\omega\cos^{2n}\omega\, d\omega;$$

la relation (1) peut donc s'écrire

$$(2)\quad \varphi(x, \mu) = \varphi(x, \mu - 2k) + \frac{k}{1}\frac{d^2\varphi(x, \mu - 2k)}{dx^2} + \cdots + \frac{d^{2k}\varphi(x, \mu - 2k)}{dx^{2k}}.$$

En effectuant les mêmes opérations sur les autres fonctions, on parviendrait à des relations de forme identique.

L'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\int \sin(x\cos\omega)\sin^{\mu}\omega\, d\omega &= \frac{1}{x}\cos(x\cos\omega)\sin^{\mu-1}\omega + \frac{\mu-1}{x^2}\sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-3}\omega\cos\omega \\ &- \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\int \sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-4}\omega\cos^2\omega\, d\omega \\ &+ \frac{\mu-1}{x^2}\int \sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-2}\omega\, d\omega.\end{aligned}$$

Pour $\mu = 1$ ou > 1, les deux premiers termes du second membre s'annulent entre les limites zéro et π, et en remplaçant dans le troisième terme $\cos^2\omega$ par sa valeur en $\sin\omega$, on trouve, après une dernière réduction,

$$\varphi(x, \mu) = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\varphi(x, \mu-2) - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\varphi(x, \mu-4).$$

Pour la fonction θ, les termes que l'on peut faire sortir du signe $\int$ sont

$$-\frac{1}{x}\sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-1}\omega + \frac{\mu-1}{x^2}\cos(x\cos\omega)\sin^{\mu-3}\omega\cos\omega.$$

Le deuxième terme est nul, quel que soit μ; il n'en est pas de même du premier terme qui, pour $\mu = 1$, devient égal à $+\frac{2\sin x}{x}$; nous aurons donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\theta(x, \mu) &= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\theta(x, \mu-2) \\ &- \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\theta(x, \mu-4) + A_{\mu},\end{aligned}\right.$$

A_μ étant nul, sauf dans le cas de $\mu = 1$, où il a pour valeur $+\frac{2\sin x}{x}$.
On trouve de même

$$\tau(x, \mu) = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\tau(x, \mu-2) - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\tau(x, \mu-4),$$

$$\psi(x, \mu) = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\psi(x, \mu-2) - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\psi(x, \mu-4) + \frac{1-(-1)^{\mu-1}}{x}.$$

Si l'on remplace dans $\frac{d^m\varphi(x, \mu)}{dx^m}$ le facteur $\cos^m\omega$ ou le facteur $\cos^{m-1}\omega$, suivant que m est pair ou non, par sa valeur en $\sin\omega$, on obtient les relations

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{2n}\varphi(x, \mu)}{dx^{2n}} = (-1)^n\Big[\varphi(x, \mu) - \dfrac{n}{1}\varphi(x, \mu+2) \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\varphi(x, \mu+4)\cdots + (-1)^n\varphi(x, \mu+2n)\Big], \\ \dfrac{d^{2n+1}\varphi(x, \mu)}{dx^{2n+1}} = (-1)^n\left[\dfrac{d\varphi(x, \mu)}{dx} - \dfrac{n}{1}\dfrac{d\varphi(x, \mu+2)}{dx} + \cdots\right]. \end{cases}$$

Les relations seraient de forme identique pour θ, ψ, τ.

De ce qui précède il résulte que, connaissant les intégrales pour les valeurs 0, 1, 2, 3 de μ, on en déduira les intégrales pour une valeur quelconque de μ.

Nous remarquerons d'abord que la fonction φ est toujours nulle; car, pour deux valeurs $\frac{\pi}{2} + \omega'$, $\frac{\pi}{2} - \omega'$ de ω, le facteur $\sin(x\cos\omega)$ aura même valeur absolue et signe contraire, le facteur $\sin^\mu\omega$ aura même valeur : il est de même facile de voir que $\tau(x, \mu)$, $\psi(x, \mu)$ sont nuls quand μ est impair.

Quand μ est pair, θ et τ ont même valeur. En effet, faisons varier dans θ, ω_1 de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et dans τ, ω_2 de $\frac{\pi}{2}$ à π, pour une valeur intermédiaire ω'; on aura

$$\omega_1 = \omega', \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega',$$

$$d\theta = \cos(x\cos\omega')\sin^\mu\omega' d\omega', \quad d\tau = \cos(x\cos\omega')(-\sin\omega')^\mu d\omega'.$$

Ces deux valeurs sont égales. Prenons maintenant

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega', \quad \omega_2 = \omega',$$

$$d\theta = \cos(-x \sin\omega')(-\cos\omega')^{\mu} d\omega', \quad d\tau = \cos(x\sin\omega')\cos^{\mu}\omega' d\omega'.$$

Nous avons encore des valeurs égales; donc θ et τ ont mêmes valeurs quand μ est un nombre pair.

On a, d'autre part, immédiatement

$$\theta(x, 1) = \left[-\frac{\sin(x\cos\omega)}{x}\right]_0^{\pi} = \frac{2\sin x}{x},$$

et en appliquant la formule (2), où nous ferons $k = 1$, $\mu = 3$,

$$\theta(x, 3) = \theta(x, 1) + \frac{d^2\theta(x, 1)}{dx^2} = \frac{4}{x^2}\frac{\sin x}{x} - \frac{4\cos x}{x^2}.$$

Il ne nous reste plus à chercher que les valeurs de θ et de ψ pour $\mu = 0$, $\mu = 2$. Or on a

$$\theta(x, 0) = \int_0^{\pi} \cos(x\cos\omega)\,d\omega = \int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{x^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} + \cdots\right)d\omega,$$

$$\theta(x, 2) = \int_0^{\pi}\cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\,d\omega$$

$$= \theta(x, 0) - \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2\omega}{1} - \frac{x^2\cos^4\omega}{1.2} + \frac{x^4\cos^6\omega}{1.2.3.4} + \cdots\right)d\omega,$$

et de même

$$\psi(x, 2) = \psi(x, 0) - \int_0^{\pi}\left(x\sin^3\omega - \frac{x^3\sin^5\omega}{1.2.3} - \cdots\right)d\omega.$$

$$\psi(x, 0) = \int_0^{\pi}\left(x\sin\omega - \frac{x^3\sin^3\omega}{1.2.3} + \cdots\right)d\omega.$$

Or, en vertu des relations connues,

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n}\omega\,d\omega = \frac{1.3\ldots2n-1}{2.4\ldots2n}\pi \quad \int_0^{\pi}\cos^{2n+1}\omega\,d\omega = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n}\omega\,d\omega = \frac{1.3\ldots2n-1}{2.4\ldots2n}\pi \quad \int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\omega\,d\omega = 2\frac{1.2.4\ldots2n}{1.3.5\ldots2n+1},$$

il vient

$$\theta(x, 0) = \pi\left(1 - \frac{x^2}{1.2}\frac{1}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdots\right),$$

$$\theta(x, 2) = \theta(x, 0) - \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{1.2}\frac{1.3}{2.4} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdots\right),$$

$$\theta(x, 2) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{1.2}\frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8}\cdots\right),$$

$$\psi(x, 0) = 2x\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3}\frac{2}{3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{2.4}{3.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdots\right),$$

$$\psi(x, 2) = \psi(x, 0) - \left(x\frac{2}{3}\frac{2}{1} - \frac{x^3}{1.3.5}\frac{2}{5}\frac{2.4}{1.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{2}{7}\frac{2.4.6}{1.3.5}\cdots\right),$$

$$\psi(x, 2) = x\left(\frac{2}{1}\frac{1}{3} - \frac{x^3}{1.2.3}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{1}{5} + \frac{x^5}{1.2.3.4}\frac{2.4}{1.3}\frac{2}{5}\frac{1}{7} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{2.4.6}{1.3.5}\frac{2}{7}\frac{1}{9}\cdots\right),$$

Application.

Nous avons vu que l'une quelconque des fonctions φ, θ, ψ, τ, que nous désignerons par V, satisfait à la relation

$$V(x, \mu) = V(x, \mu - 2k) + \frac{k}{1}\frac{d^2V(x, \mu - 2k)}{dx^2} + \ldots$$

Si nous posons $k = 1$, il vient

$$(5)\qquad V(x, \mu) = V(x, \mu - 2) + \frac{d^2V(x, \mu - 2)}{dx^2}.$$

Supposons maintenant que la relation

$$(6)\qquad \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV(x, \mu)}{dx} + V(x, \mu) = 0$$

soit satisfaite, je dis qu'en vertu de la relation (5) on aura aussi

$$(7)\qquad \frac{d^2V(x, \mu+2)}{dx^2} + \frac{\mu+3}{x}\frac{dV(x, \mu+2)}{dx} + V(x, \mu+2) = 0.$$

Nous pouvons, en effet, écrire la relation (5)

$$V(x, \mu + 2) = V(x, \mu) + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (7), on a

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{d^4V(x, \mu)}{dx^4} + \frac{\mu + 3}{x}\frac{dV(x, \mu)}{dx} \\ & + \frac{\mu + 3}{x}\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} + V(x, \mu) + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2}. \end{aligned} \right.$$

Or, si nous différentions deux fois de suite la relation (6), nous trouvons

$$\frac{d^4V(x, \mu)}{dx^4} + \frac{\mu + 1}{x}\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} - 2\frac{\mu + 1}{x^2}\frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + 2\frac{\mu + 1}{x^3}\frac{dV(x, \mu)}{dx} + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} + \frac{\mu + 1}{x}\frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} - \frac{\mu + 1}{x^2}\frac{dV(x, \mu)}{dx} + \frac{dV(x, \mu)}{dx} = 0.$$

Multiplions la première par $\frac{2}{x}$ et ajoutons-la membre à membre à l'autre; nous trouverons

$$\frac{d^4V(x, \mu)}{dx^4} + \frac{\mu + 3}{x}\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dV(x, \mu)}{dx} = 0,$$

et, en retranchant cette équation membre à membre de l'équation (8),

$$\frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{\mu + 1}{x}\frac{dV(x, \mu)}{dx} + V(x, \mu) = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (6) que nous avons supposée satisfaite.

Donc, si $V(x, 0)$, $V(x, 1)$ satisfont à la relation (6), il en est de même quel que soit μ.

La fonction φ étant toujours nulle, il n'y a pas lieu de la considérer; $\varphi(x, 1)$, $\psi(x, 1)$ étant nuls satisfont à l'équation différentielle; $\theta(x, 1)$ substitué à V rend l'équation différentielle identiquement nulle. On

vérifie facilement que $\theta(x, 0)$ satisfait à l'équation différentielle; car, en substituant dans le premier membre la valeur de $\theta(x, 0)$ et de ses dérivées, on trouve

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\, d\omega - \frac{1}{x}\int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\cos\omega\, d\omega\,;$$

le dernier terme est nul, le premier, intégré par parties, se réduit à

$$-\left[\frac{\sin(x\cos\omega)}{x}\sin\omega\right]_0^\pi,$$

qui est évidemment nul.

Pour $\psi(x, 0)$, on arrive à un terme

$$-\left[\frac{\cos(x\sin\omega)}{x}\cos\omega\right]_0^\pi,$$

dont la valeur est $\frac{2}{x}$; par conséquent $\psi(x, 0)$ ne satisfait pas à l'équation différentielle. Celle-ci n'est donc satisfaite que par la fonction $\theta(x, \mu)$ et par la fonction $\tau(x, \mu)$, qui est toujours nulle ou identique à $\theta(x, \mu)$.

Ainsi l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx}+V=0 \tag{6}$$

admet toujours l'intégrale

$$V = A\theta(x, \mu). \tag{9}$$

On pourrait déduire de là, dans certains cas, l'intégrale complète. Considérons A comme fonction de x, cherchons les valeurs de $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, et introduisons-les dans l'équation (6); celle-ci deviendra

$$A\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{\mu+1}{x}A\frac{d\theta}{dx}+A\theta+2\frac{dA}{dx}\frac{d\theta}{dx}+\frac{\mu+1}{x}\theta\frac{dA}{dx}+\theta\frac{d^2A}{dx^2}=0,$$

qui se réduit à

$$\theta\frac{d^2A}{dx^2}+\left(2\frac{d\theta}{dx}+\frac{\mu+1}{x}\theta\right)\frac{dA}{dx}=0$$

ou, en posant $\frac{dA}{dx} = B$,

$$\frac{\frac{dB}{dx}}{B} = -2\frac{\frac{d\theta}{dx}}{\theta} - \frac{\mu+1}{x}.$$

On a donc, en intégrant et désignant par k une constante arbitraire,

$$B\theta^2 x^{\mu+1} = k,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dA}{dx} = \frac{k}{\theta^2 x^{\mu+1}}, \quad A = k' + \int \frac{k\,dx}{x^{\mu+1}\theta^2},$$

ou enfin

$$V = k'\theta(x,\mu) + k\theta(x,\mu)\int \frac{dx}{x^{\mu+1}\theta^2(x,\mu)}.$$

Si $\mu = 1$, l'intégration se fait immédiatement, et l'on a

$$V = \frac{2k'\sin x}{x} - \frac{k\cos x}{x} = \frac{k_1\sin x + k_2\cos x}{x};$$

mais, en général, il serait impossible d'effectuer l'intégration.

Nous avons vu que la formule (2) permet d'exprimer $\theta(x,\mu)$ en fonction de $\theta(x,\mu-2k)$ et de ses dérivées par rapport à x; si μ est impair et que l'on prenne $\mu - 2k = 1$, ce qui est toujours possible, la formule (2) donne

$$(10)\quad \theta(x,\mu) = \theta(x,1) + \frac{\mu-1}{2}\frac{d^2\theta(x,1)}{dx^2} + \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}\frac{d^4\theta(x,1)}{dx^4} + \ldots + \frac{d^{\mu-1}\theta(x,1)}{dx^{\mu-1}}.$$

De la valeur connue de $\theta(x,1)$ on déduit

$$(11)\quad \tfrac{1}{2}d^{2n}\theta(x,1) = (-1)^n\left[\frac{\sin x}{x} + 2n\frac{\cos x}{x^2} - 2n(2n-1)\frac{\sin x}{x^3} - 2n(2n-1)(2n-2)\frac{\cos x}{x^4} + \ldots + \ldots + 2n(2n-1)\ldots 2.1\frac{\sin x}{x^{2n+1}}\right];$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
\theta(x,\mu) = 2\frac{\sin x}{x}&\left[1 - \frac{\mu-1}{2} + \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2} - \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}\ldots\right]\\
+2\frac{\cos x}{x^2}&\left[-\frac{\mu-1}{2}2 + \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4 - \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6\ldots\right]\\
+2\frac{\sin x}{x^3}&\left[\frac{\mu-1}{2}2.1 - \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4.3 + \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6.5\ldots\right]\\
+2\frac{\cos x}{x^4}&\left[-\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4.3.2 + \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6.5.4\ldots\right]\\
+2\frac{\sin x}{x^5}&\left[+\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4.3.2.1 - \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6.5.4.3\ldots\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\theta(x,\mu)$ sera donc toujours de la forme

$$\varphi(x)\sin x + \psi(x)\cos x,$$

comme cela résulte évidemment des formes des équations (10) et (11). En outre, nous savons que cette valeur de V

$$V_1 = k_1[\varphi(x)\sin x + \psi(x)\cos x] \tag{12}$$

satisfait à l'équation différentielle donnée ; nous allons démontrer que

$$V_2 = k_2[\psi(x)\sin x - \varphi(x)\cos x] \tag{13}$$

satisfera aussi à la même équation, et par suite que l'intégrale complète sera

$$V = \sin x[k_1\varphi(x) + k_2\psi(x)] + \cos x[k_1\psi(x) - k_2\varphi(x)].$$

En effet, substituons à V la valeur (12) dans l'équation (6), on aura, en désignant les dérivées par rapport à x par des accents,

$$\begin{aligned}
&k_1(\varphi''\sin x + \psi''\cos x + 2\varphi'\cos x - 2\psi'\sin x - \varphi\sin x - \psi\cos x)\\
&\quad + k_1\frac{\mu+1}{x}(\varphi'\sin x + \psi'\cos x + \varphi\cos x - \psi\sin x)\\
&\qquad\qquad + k_1(\varphi\sin x + \psi\cos x) = 0.
\end{aligned}$$

Pour que le premier membre soit identiquement nul, quel que soit x, il faut que les facteurs de $\sin x$ et $\cos x$ soient nuls séparément; d'où

$$\varphi'' - 2\psi' - \varphi + \frac{\mu+1}{x}(\varphi' - \psi) + \varphi = 0,$$

$$\psi'' + 2\varphi' - \psi + \frac{\mu+1}{x}(\psi' - \varphi) + \psi = 0.$$

Or la substitution de V_2 à V dans (6) donnera

$$k_2(\psi''\sin x - \varphi''\cos x + 2\psi'\cos x + 2\varphi'\sin x - \psi\sin x + \varphi\cos x)$$
$$+ k_2\frac{\mu+1}{x}(\psi'\sin x - \varphi'\cos x + \psi\cos x + \varphi\sin x)$$
$$+ k_2(\psi\sin x - \varphi\cos x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$k_2\sin x\left[\psi'' + 2\varphi' - \psi + \frac{\mu+1}{x}(\psi' + \varphi) + \psi\right]$$
$$+ k_2\cos x\left[-\varphi'' + 2\psi' + \varphi + \frac{\mu+1}{x}(-\varphi' + \psi) - \varphi\right] = 0.$$

Les facteurs de $\sin x$ et $\cos x$ étant les mêmes que plus haut, où ils étaient nuls, puisque V_1 est l'intégrale de l'équation différentielle (6), la même chose a encore lieu, et l'intégrale générale de

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0,$$

lorsque μ est impair, sera

$$V = \sin x[k_1\varphi(x) + k_2\psi(x)] + \cos x[k_1\psi(x) - k_2\varphi(x)],$$

où φ et ψ sont déterminés par la relation

$$\vartheta(x,\mu) = \varphi(x)\sin x + \psi(x)\cos x,$$

et sont faciles à déterminer par les formules (10), (11) et (3).

Lorsque μ est pair, nous n'avons qu'une intégrale particulière $k\vartheta(x,\mu)$ et la fonction est sous forme de série.

Sur de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs représentent exactement la fonction elliptique de première espèce à module quelconque ;

PAR M. H. MOLINS.

---

1. Dans un précédent Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (2e série, t. XIX, p. 436-440), nous avons été amené à indiquer deux classes de courbes algébriques gauches dont les arcs possèdent cette propriété que, pour l'une de ses deux classes, ils s'expriment exactement par des arcs de cercle, et que pour l'autre ils représentent une fonction elliptique quelconque de deuxième espèce. Nous nous proposons maintenant de signaler de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce à module quelconque. On connaît les courbes gauches découvertes par M. William Roberts, dont les arcs représentent les trois sortes de fonctions elliptiques [*], et celles indiquées par M. Hermite pour représenter la fonction de première espèce [**]. Les courbes dont nous nous occupons offrent cette particularité que, tout en représentant par leurs arcs une fonction elliptique quelconque de première espèce, elles conduisent à de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle ou par une fonction elliptique quelconque de deuxième espèce.

2. Considérons deux courbes rapportées à trois axes rectangulaires, et désignons-les par Σ et Σ'; admettons que chacune d'elles soit la

[*] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. IX, p. 155.

[**] *Cours d'Analyse*, Ire Partie, p. 419.

transformée de l'autre par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de transformation l'origine O des coordonnées. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe Σ, et x', y', z' celles du point correspondant M' de la courbe Σ'; les deux rayons vecteurs OM, OM' sont liés par la relation $\mathrm{OM} \times \mathrm{OM}' = \lambda^2$, λ^2 étant le paramètre de transformation, que nous supposerons positif. On a, en outre, les relations

$$(1) \qquad x' = \frac{\lambda^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{\lambda^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{\lambda^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Supposons que la courbe Σ soit la courbe algébrique représentée par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta, \\ y = a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta, \\ z = c\sin\zeta, \end{cases}$$

dans lesquelles ζ est une indéterminée et p un nombre commensurable quelconque. Ce nombre p peut d'ailleurs être supposé positif; car, s'il était négatif, on n'aurait qu'à changer le sens dans lequel on compte les y positifs, pour retomber sur les équations (2) où p est positif, sauf le changement de a en b, et réciproquement. De ces équations on déduit

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\zeta + c^2\sin^2\zeta \\ &= (a+b)^2 - (4ab - c^2)\sin^2\zeta, \end{aligned}$$

ou bien

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta\right].$$

En vertu des relations (1), les équations de la courbe Σ' seront

$$\begin{aligned} \frac{x'}{\lambda^2} &= \frac{a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta}{(a+b)^2 - (4ab - c^2)\sin^2\zeta}, \\ \frac{y'}{\lambda^2} &= \frac{a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta}{(a+b)^2 - (4ab - c^2)\sin^2\zeta}, \\ \frac{z'}{\lambda^2} &= \frac{c\sin\zeta}{(a+b)^2 - (4ab - c^2)\sin^2\zeta}. \end{aligned}$$

Cette courbe Σ' sera d'ailleurs algébrique, de même que la courbe Σ, lorsque p sera commensurable.

5. Soient ds l'élément de l'arc de la courbe Σ, ds' l'élément de l'arc de la courbe Σ'; ces deux quantités sont liées par la relation

$$ds' = \frac{\lambda^2 ds}{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{4}$$

Les équations (2) donnent par la différentiation

$$\begin{aligned} dx &= -[a(p+1)\sin(p+1)\zeta + b(p-1)\sin(p-1)\zeta]d\zeta,\\ dy &= [a(p+1)\cos(p+1)\zeta + b(p-1)\cos(p-1)\zeta]d\zeta,\\ dz &= c\cos\zeta d\zeta, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} ds^2 &= [a^2(p+1)^2 + b^2(p-1)^2 + 2ab(p^2-1)\cos 2\zeta + c^2\cos^2\zeta]d\zeta^2,\\ &= \{[p(a+b) + a - b]^2 + c^2 - [4ab(p^2-1) + c^2]\sin^2\zeta\}d\zeta^2, \end{aligned}$$

$$ds = d\zeta\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sqrt{1 - \frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sin^2\zeta}. \tag{5}$$

Substituant dans la formule (4) les valeurs de ds et $x^2+y^2+z^2$, données par les équations (3) et (5), on obtient

$$ds' = \frac{\lambda^2\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}}{(a+b)^2}\,\frac{\sqrt{1 - \dfrac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sin^2\zeta}}{1 - \dfrac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta}\,d\zeta.$$

Établissons maintenant entre les constantes a, b, c et p la condition

$$\frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2} = \frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}; \tag{6}$$

la formule précédente deviendra

$$ds' = \frac{\lambda^2\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}}{(a+b)^2}\,\frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \dfrac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta}},$$

d'où

$$(7) \qquad s' = \frac{\lambda^2\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}}{(a+b)^2}\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta}},$$

l'arc s' étant supposé compté à partir du point pour lequel $\zeta = 0$.

Admettons que la valeur de c tirée de la relation (6) soit réelle et que le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ soit positif et moindre que l'unité : on voit par la formule (7) que l'arc s' s'exprimera par une fonction elliptique de première espèce ayant pour module $\frac{\sqrt{4ab-c^2}}{a+b}$. Or je vais démontrer qu'on peut toujours disposer des trois constantes a, b et p, dont la dernière restera commensurable, pour que les deux conditions dont il s'agit soient remplies ; je ferai voir en outre que le module $\frac{\sqrt{4ab-c^2}}{a+b}$ peut être supposé quelconque, d'où il résultera que toutes les fonctions elliptiques de première espèce se trouveront représentées par des arcs de courbes algébriques.

4. La relation (6), après quelques réductions faciles, peut se mettre sous la forme

$$c^4+c^2\{[p(a+b)+a-b]^2+(a-b)^2\}-8ab[p(a^2-b^2)+a^2+b^2]=0,$$

ou bien

$$\frac{c^4}{a^4}+\frac{c^2}{a^2}\left\{\left[p\left(1+\frac{b}{a}\right)+1-\frac{b}{a}\right]^2+\left(1-\frac{b}{a}\right)^2\right\}-8\frac{b}{a}\left[p\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+1+\frac{b^2}{a^2}\right]=0.$$

Le nombre p étant supposé positif, si l'on choisit a et b de manière que $\frac{b}{a}$ soit une fraction positive, le terme $-8\frac{b}{a}\left[p\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+1+\frac{b^2}{a^2}\right]$ sera négatif, et par conséquent les deux valeurs de $\frac{c^2}{a^2}$ déduites de l'équation précédente seront réelles ; l'une d'elles sera positive et l'autre négative. En outre, comme le coefficient de $\frac{c^2}{a^2}$ est positif, la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ sera numériquement la plus petite. On trouve pour cette

valeur positive

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{c^2}{a^2} = &-\tfrac{1}{2}\left[p\left(1+\frac{b}{a}\right)+1-\frac{b}{a}\right]^2-\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2\\ &+\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a}\right)\sqrt{p^2\left[p+2+(p-2)\frac{b}{a}\right]^2+4\left[p+1-(p-1)\frac{b}{a}\right]^2}.\end{aligned}\right.$$

Or la relation (6), mise sous la forme

$$(9)\qquad \frac{4ab-c^2}{(a+b)^2} = \frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2+c^2},$$

montre d'abord que, si l'on met pour c^2 la valeur positive déterminée par la formule (8), le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ est positif, comme étant égal à un autre rapport nécessairement positif. En second lieu, il est moindre que l'unité, c'est-à-dire qu'on a $(a+b)^2 > 4ab - c^2$, inégalité évidente puisqu'elle revient à $(a-b)^2+c^2 > 0$. Ainsi le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ est rendu positif et moindre que l'unité par la valeur positive de c^2, en sorte que cette valeur de c^2 est admissible; donc toute valeur positive et moindre que l'unité de $\frac{b}{a}$, jointe à la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ qui y correspond, donne lieu à un arc s' de courbe algébrique Σ', lequel s'exprime par une fonction elliptique de première espèce.

Si l'on faisait $\frac{b}{a} = 1$, la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ serait

$$\frac{c^2}{a^2} = -2p^2 + 2\sqrt{p^4+4};$$

par suite le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ deviendrait

$$\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2} = \tfrac{1}{2}\left(2+p^2-\sqrt{p^4+4}\right),$$

et l'on vérifie immédiatement que c'est une fraction positive, quel que soit p.

5. Il reste à démontrer que, par une valeur convenable attribuée

au nombre commensurable p, on peut rendre le rapport $\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}$ égal à une fraction positive quelconque. Posons donc

$$(10) \qquad \frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = k^2,$$

k étant une fraction donnée : c'est la condition à laquelle il s'agit de satisfaire. On devra avoir aussi, en vertu de la relation (9),

$$(11) \qquad \frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2+c^2} = k^2.$$

Les équations (10) et (11) donnent

$$c^2 = 4ab - k^2(a+b)^2,$$
$$c^2 = \frac{4abp^2}{k^2} - [p(a+b)+a-b]^2 - (a+b)^2;$$

par suite

$$4ab - k^2(a+b)^2 = \frac{4abp^2}{k^2} - [p(a+b)+a-b]^2 - (a+b)^2,$$

ou bien

$$4ab\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) + (1-k^2)(a+b)^2 + [p(a+b)+a-b]^2 = 0.$$

Posant $\frac{b}{a} = t$, on obtient

$$4t\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) + (1-k^2)(1+t)^2 + [p(1+t)+1-t]^2 = 0,$$

ou enfin

$$(12) \quad [(p-1)^2+1-k^2]t^2 - 2(p^2-k^2)\left(\frac{2}{k^2}-1\right)t + 1 - k^2 + (p+1)^2 = 0.$$

Pour que les racines de cette dernière équation soient réelles, il faut qu'on ait

$$(p^2-k^2)^2\left(\frac{2}{k^2}-1\right)^2 - [(p-1)^2+1-k^2][1-k^2+(p+1)^2] > 0,$$

ce qui revient, toutes réductions faites, à la condition

$$\frac{4p^2}{k^4}(1-k^2)(p^2-2k^2)>0.$$

On devra donc attribuer à p une valeur commensurable telle qu'on ait $p^2-2k^2>0$, ou $p>k\sqrt{2}$. Les deux racines seront en outre positives, puisque, p étant plus grand que k, le coefficient de t dans l'équation (12), à savoir $-2(p^2-k^2)\left(\frac{2}{k^2}-1\right)$, est négatif, tandis que le coefficient de t^2 et le dernier terme sont positifs. On va démontrer maintenant que la plus petite des deux racines peut être supposée moindre que l'unité.

Faisons successivement $t=0$ et $t=1$ dans le premier membre de l'équation (12) : 1° pour $t=0$, ce premier membre devient

$$1-k^2+(p+1)^2,$$

quantité positive ; 2° pour $t=1$, il devient

$$(p-1)^2+1-k^2-2(p^2-k^2)\left(\frac{2}{k^2}-1\right)+1-k^2+(p+1)^2,$$

ou, en réduisant,

$$4\left[2-k^2-p^2\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\right];$$

et, si l'on exprime que ce dernier résultat est négatif, on a

$$2-k^2-p^2\left(\frac{1}{k^2}-1\right)<0,$$

d'où

(13) $$p>k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}.$$

Donc, si l'on prend pour p un nombre commensurable supérieur à $k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}$, l'équation (12) aura une racine comprise entre zéro et 1; l'autre racine, qui est aussi positive, sera plus grande que l'unité.

D'ailleurs la condition (13) entraîne celle déjà trouvée $p > k\sqrt{2}$, qui exprime que les racines sont réelles, puisqu'on a $\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}} > \sqrt{2}$. C'est la racine comprise entre zéro et 1 qui sera la valeur choisie pour $\frac{b}{a}$.

Le cas où $k^2 = \frac{1}{2}$ mérite d'être remarqué. On obtient alors des courbes algébriques gauches dont l'arc s'exprime par la même fonction elliptique de première espèce que l'arc de la lemniscate. La condition (13) devient $p > \sqrt{\frac{3}{2}}$, et l'on peut faire, par exemple, $p = \frac{3}{2}$ ou $p = 2$.

6. La valeur de $\frac{b}{a}$ moindre que l'unité ayant été trouvée dans le cas où l'on se donne k, il y aura deux valeurs de $\frac{c^2}{a^2}$ qui y correspondront, l'une positive, l'autre négative, et elles seront déterminées par l'équation (6). Mais, de ces deux valeurs il n'y en aura évidemment qu'une seule qui puisse rendre le rapport $\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}$ égal à k^2; je vais faire voir que c'est la valeur positive qui possède cette propriété.

D'abord l'équation (12) détermine $\frac{b}{a}$ en fonction de k; puis, à l'aide de la valeur de $\frac{b}{a}$, on détermine $\frac{c^2}{a^2}$ par l'équation

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = \frac{4ab(p^2-1) + c^2}{[p(a+b) + a - b]^2 + c^2},$$

laquelle se déduit des deux conditions (10), (11), et revient à

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = \frac{4abp^2}{[p(a+b) + a - b]^2 + (a+b)^2 + c^2}.$$

Or, si l'on prend pour $\frac{c^2}{a^2}$ la valeur positive donnée par la formule (8), je dis qu'il résulte des équations précédentes que la valeur des deux rapports égaux

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}, \quad \frac{4abp^2}{[p(a+b) + a - b]^2 + (a+b)^2 + c^2}$$

est égale à k^2.

Posons, en effet, $\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = \mu$; on aura aussi

$$\frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2+c^2} = \mu,$$

puisque ces deux rapports sont rendus égaux par la valeur de $\frac{c^2}{a^2}$; on en déduit

$$(a+b)^2 = \frac{4ab-c^2}{\mu}, \quad [p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2 = \frac{4abp^2}{\mu} - c^2.$$

Substituant ces expressions de

$$(a+b)^2 \quad \text{et} \quad [p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2$$

dans l'équation suivante :

$$4ab - k^2(a+b)^2 = \frac{4abp^2}{k^2} - [p(a+b)+a-b]^2 - (a+b)^2,$$

obtenue au n° 5 et qui est l'équivalente de l'équation (12), il vient

$$4ab - \frac{k^2}{\mu}(4ab-c^2) = \frac{4abp^2}{k^2} + c^2 - \frac{4abp^2}{\mu},$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$(\mu - k^2)\left[4\frac{b}{a}\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)+\frac{c^2}{a^2}\right] = 0.$$

Mais on a

$$p > k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{p^2}{k^2} > \frac{2-k^2}{1-k^2}, \quad \frac{p^2}{k^2} - 1 > 0;$$

les trois quantités

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{p^2}{k^2} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{a^2}$$

étant positives, l'expression

$$4\frac{b}{a}\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)+\frac{c^2}{a^2}$$

l'est aussi, et dès lors l'équation précédente ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a $\mu - k^2 = 0$ ou $\mu = k^2$, c'est-à-dire que la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ rend le rapport $\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}$ égal à k^2.

7. De ce résultat il faut conclure qu'on peut se servir, pour déterminer la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$, de la relation

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = k^2,$$

qui donne

$$\frac{c^2}{a^2} = 4\frac{b}{a} - k^2\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2. \tag{14}$$

Quant à la valeur de $\frac{b}{a}$ qu'on doit substituer dans cette formule, c'est la plus petite racine de l'équation (12), laquelle est positive et moindre que l'unité, pourvu qu'on prenne $p > k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}$; on trouve pour cette racine

$$\frac{b}{a} = \frac{(p^2 - k^2)\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - \frac{2p}{k^2}\sqrt{(1-k^2)(p^2 - 2k^2)}}{(p-1)^2 + 1 - k^2}, \tag{15}$$

d'où

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{2p}{k^2}\,\frac{p - k^2 - \sqrt{(1-k^2)(p^2 - 2k^2)}}{(p-1)^2 + 1 - k^2}.$$

Portant ces valeurs de $\frac{b}{a}$ et $1 + \frac{b}{a}$ dans la formule (14), on obtient, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{a^2} = {} & \frac{1}{k^2[(p-1)^2 + 1 - k^2]^2} \\ & \times \{4p^3(k^2-1) + p^2[4(1-k^2) - k^4] + 2k^2(2-k^2)p \\ & \quad - k^2(2-k^2)^2 + 2p(p-1)(2-k^2)\sqrt{(1-k^2)(p^2-2k^2)}\}.\end{aligned}$$

8. D'après ce qui précède, lorsqu'on se donne la valeur de k, supposée moindre que l'unité, on peut prendre arbitrairement le nombre commensurable p, pourvu qu'il satisfasse à la condition $p > k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}$.

Réciproquement, si l'on se donne p, la même condition devra être satisfaite par une valeur de k moindre que l'unité; mais elle peut alors se mettre sous une forme plus commode. On en déduit, en effet,

$$p^2(1-k^2) > k^2(2-k^2), \quad \text{ou} \quad k^4-(p^2+2)k^2+p^2>0,$$

d'où

$$\left(\frac{p^2+2}{2}-k^2\right)^2 > \tfrac{1}{4}(p^4+4),$$

et enfin

$$k^2 < \tfrac{1}{2}\left(p^2+2-\sqrt{p^4+4}\right).$$

La quantité $\frac{1}{2}(p^2+2-\sqrt{p^4+4})$ est d'ailleurs positive et moindre que l'unité, quel que soit p. Ainsi, en se donnant p, on pourra attribuer à k une valeur quelconque inférieure à la racine carrée de cette quantité. Si l'on fait, par exemple, $p=1$, on devra avoir $k^2<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

9. Les valeurs des rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ étant supposées connues, les courbes Σ', dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce, se trouveront déterminées. La constante a restera arbitraire, et les constantes b et c se déduiront des rapports dont il s'agit. Quant au nombre commensurable p, il sera susceptible de recevoir un nombre infini de valeurs, et chaque valeur de p donnera lieu à une classe de courbes qui répondront à toutes les valeurs moindres que l'unité attribuées au rapport $\frac{b}{a}$; d'ailleurs, $\frac{b}{a}$ et p étant connus, $\frac{c}{a}$ n'aura qu'une seule valeur correspondante, qu'on obtiendra à l'aide de la formule (8).

Nous remarquerons encore que, pour un même système de valeurs de $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ et p, on aura un nombre infini de courbes homothétiques, répondant à toutes les valeurs particulières du paramètre a et ayant pour centre commun d'homothétie le point O. Cela résulte visiblement des expressions de x', y', z', en fonction de ζ, lesquelles sont homogènes par rapport à a, b, c.

10. Considérons maintenant une quelconque des courbes Σ'. On peut vouloir substituer aux expressions de x', y', z' en fonction de l'indéterminée ζ deux équations entre ces trois coordonnées; ce seront les équations de la courbe Σ'. Formons d'abord les équations de

la courbe Σ, dont Σ' est la transformée, et qui est représentée par les équations (2). Nous nous bornerons à examiner le cas où p est un entier positif.

Les deux premières équations (2) donnent

$$x^2 + y^2 = (a+b)^2 - 4ab\sin^2\zeta;$$

par suite, en ayant égard à la troisième, qui donne $\sin\zeta = \frac{z}{c}$,

$$(16)\qquad x^2 + y^2 + \frac{4ab}{c^2}z^2 = (a+b)^2;$$

c'est l'une des équations de la courbe Σ, et l'on voit qu'elle représente un ellipsoïde de révolution ou un hyperboloïde de révolution à une nappe, selon que a et b sont de même signe ou de signes contraires.

Pour obtenir une autre équation de la même courbe, posons

$$u^2 = x^2 + y^2.$$

Il vient

$$u^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\zeta,$$

d'où

$$\cos 2\zeta = \frac{u^2 - a^2 - b^2}{2ab}, \quad \sin 2\zeta = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - u^2)^2},$$

$$a + b\cos 2\zeta = \frac{u^2 + a^2 - b^2}{2a}, \quad \tang\zeta = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}}.$$

On a en outre les formules suivantes :

$$\frac{\sin(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = (p+1)\tang\zeta - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\tang^3\zeta + \ldots,$$

$$\frac{\cos(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\tang^2\zeta + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\tang^4\zeta - \ldots$$

qui deviennent, en remplaçant $\tang\zeta$ par sa valeur en u,

$$\frac{\sin(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}}\left[p + 1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\,\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2} + \ldots\right],$$

$$\frac{\cos(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\,\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}$$
$$+ \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\left[\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}\right]^2 - \ldots.$$

Faisons

$$A = p + 1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2-(a-b)^2} + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.5}\left[\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}\right]^2 - \ldots,$$

$$B = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2} + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\left[\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}\right]^2 - \ldots;$$

il vient

$$\sin(p+1)\zeta = A\cos^{p+1}\zeta\sqrt{\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}},$$
$$\cos(p+1)\zeta = B\cos^{p+1}\zeta.$$

Maintenant, des deux premières équations (2) on déduit

$$\frac{y}{x} = \frac{a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta}{a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta}$$
$$= \frac{(a+b\cos 2\zeta)\sin(p+1)\zeta - b\sin 2\zeta\cos(p+1)\zeta}{(a+b\cos 2\zeta)\cos(p+1)\zeta + b\sin 2\zeta\sin(p+1)\zeta};$$

et si l'on met pour $\sin(p+1)\zeta$, $\cos(p+1)\zeta$ les expressions précédentes, et pour $a+b\cos 2\zeta$, $\sin 2\zeta$ leurs valeurs en fonction de u, on obtient l'équation suivante :

$$(17)\qquad \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b^2)}}\,\frac{A(u^2+a^2-b^2) - B[u^2-(a-b)^2]}{B(u^2+a^2-b^2) + A[(a+b)^2-u^2]},$$

qui est celle de la projection de la courbe Σ sur le plan xy, en concevant que u^2 soit remplacé par x^2+y^2.

Les équations de la courbe Σ' se déduiront des équations (16) et (17) de la courbe Σ, dont elle est la transformée, en y remplaçant x, y, z par les expressions

$$x = \frac{\lambda^2 x'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad y = \frac{\lambda^2 y'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad z = \frac{\lambda^2 z'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

D'abord, au moyen de l'équation (16), on obtient la suivante :

$$(18)\qquad x'^2 + y'^2 + \frac{4ab}{c^2}z'^2 = \frac{(a+b)^2}{\lambda^4}(x'^2+y'^2+z'^2)^2 ;$$

puis, si l'on fait

$$r^2 = x'^2 + y'^2, \quad R^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$A' = p + 1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\frac{(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4} + \ldots,$$

$$B' = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\frac{(a+b) R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4} + \ldots,$$

on trouve que l'équation (17) donne cette autre :

$$(19) \quad \frac{y'}{x'} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4}\,\frac{A'[\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] - B'[\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4]}{B'[\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] + A'[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2]}}.$$

Ainsi les équations (18) et (19), où r^2 et R^2 doivent être remplacés par leurs expressions en x', y', z', sont celles de la courbe Σ'.

11. Appliquons ce qui précède au cas où $p = 1$. L'inégalité

$$k^2 < \frac{1}{2}\left(p^2 + 2 - \sqrt{p^4 + 4}\right)$$

devient $k^2 < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; admettons que cette condition soit remplie. Les valeurs de $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, données par les formules qui expriment ces quantités en fonction de p et k (n° 7), sont

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{k^2\sqrt{1-k^2}}\left[(2-k^2)\sqrt{1-k^2} - 2\sqrt{1-2k^2}\right], \quad \frac{c}{a} = \frac{2k}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Voyons ce que devient l'équation (19).

D'abord, en faisant $p = 1$ dans les expressions de A′ et B′, on trouve

$$A' = 2, \quad B' = 1 - \frac{(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4} = \frac{2[\lambda^4 r^2 - (a^2+b^2)R^4]}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4};$$

par suite

$$\begin{aligned}
&A'[\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] - B'[\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4] \\
&\quad = 2[\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] - 2[\lambda^4 r^2 - (a^2+b^2)R^4] = 4a^2 R^4, \\
&B'[\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] + A'[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2] \\
&\quad = \frac{2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4}\big\{[\lambda^4 r^2 - (a^2+b^2)R^4][\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] \\
&\qquad\qquad + [(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2][\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4]\big\} \\
&\quad = \frac{4a^2 R^4[\lambda^4 r^2 - (a^2-b^2)R^4]}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4}.
\end{aligned}$$

Substituant ces expressions dans l'équation (19), on obtient

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\sqrt{[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2][\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4]}}{\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4};$$

mais on peut déduire de ce résultat une équation beaucoup plus simple. Pour cela, faisons les carrés des deux membres et ajoutons-y l'unité; il vient

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{x'^2} &= \frac{[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2][\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4] + [\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4]^2}{[\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4]^2} \\ &= \frac{4\lambda^4 b^2 r^2 R^4}{[\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4]^2},\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{x'} = \frac{2\lambda^2 b R^2}{\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4},$$

ou bien, en mettant pour r^2 et R^2 leurs valeurs,

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda^4(x'^2 + y'^2) - 2\lambda^2 b x'(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &\quad = (a^2 - b^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2. \end{aligned}\right.$$

Concluons-en que les équations (18) et (20) représentent une classe de courbes algébriques dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce.

On peut, au reste, en procédant directement, arriver bien plus simplement à l'équation (20). En vertu de l'hypothèse $p = 1$, les équations (2) donnent

$$x = a\cos 2\zeta + b, \quad y = a\sin 2\zeta,$$

par suite

$$\frac{\lambda^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} - b = a\cos 2\zeta, \quad \frac{\lambda^2 y'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = a\sin 2\zeta;$$

on a donc

$$\left(\frac{\lambda^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} - b\right)^2 + \frac{\lambda^4 y'^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2} = a^2$$

ou bien

$$\frac{\lambda^4(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2} - \frac{2\lambda^2 b x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = a^2 - b^2,$$

ce qui fait retomber sur l'équation (20).

12. Dans le cas général, où p est un nombre commensurable quelconque, on peut vouloir exprimer x', y', z' en fonction rationnelle d'une même indéterminée. Admettons, par exemple, que p soit entier, et posons

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{1-v^2}{2v},$$

v étant cette indéterminée; on en déduit

$$\sin\zeta = \frac{1-v^2}{1+v^2},\quad \cos\zeta = \frac{2v}{1+v^2},\quad \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\zeta} = \frac{1+v^2}{2v},\quad \sin 2\zeta = \frac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2},$$

$$a + b\cos 2\zeta = \frac{(a+b)+(a-b)\operatorname{tang}^2\zeta}{1+\operatorname{tang}^2\zeta} = \frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2}.$$

Les formules (2) peuvent se mettre sous la forme

$$(21)\quad \begin{cases} x = (a+b\cos 2\zeta)\cos(p+1)\zeta + b\sin 2\zeta\sin(p+1)\zeta, \\ y = (a+b\cos 2\zeta)\sin(p+1)\zeta - b\sin 2\zeta\cos(p+1)\zeta, \\ z = c\sin\zeta. \end{cases}$$

Or nous avons trouvé plus haut (n° **10**)

$$\cos(p+1)\zeta = \mathrm{B}\cos^{p+1}\zeta,\quad \sin(p+1)\zeta = \mathrm{A}\operatorname{tang}\zeta\cos^{p+1}\zeta;$$

donc on a

$$\cos(p+1)\zeta = \mathrm{B}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1},\quad \sin(p+1)\zeta = \mathrm{A}\,\frac{1-v^2}{2v}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1};$$

et d'un autre côté, les valeurs de A et B exprimées en v sont

$$\mathrm{A} = p+1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^2 + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^4 - \ldots,$$

$$\mathrm{B} = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^2 + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^4 - \ldots.$$

Substituant dans les formules (21) les expressions de $\sin\zeta$, $\sin 2\zeta$,

$a + b\cos 2\zeta$, $\cos(p+1)\zeta$, $\sin(p+1)\zeta$ en fonction de v, il vient

$$(22)\quad \begin{cases} x = \mathrm{B}\left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1} \dfrac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2} + b\mathrm{A}\dfrac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2}\,\dfrac{1-v^2}{2v}\left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}, \\ y = \mathrm{A}\,\dfrac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2}\,\dfrac{1-v^2}{2v}\left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1} - b\mathrm{B}\left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}\dfrac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2}, \\ z = \dfrac{c(1-v^2)}{1+v^2}; \end{cases}$$

on a en outre

$$x^2+y^2+z^2 = (a+b)^2-(4ab-c^2)\sin^2\zeta = (a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2.$$

Cela posé, si l'on remplace la quantité $x^2+y^2+z^2$ par sa valeur en v, les formules (1) deviennent

$$x' = \frac{\lambda^2 x}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2},$$

$$y' = \frac{\lambda^2 y}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2},$$

$$z' = \frac{\lambda^2 z}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\dfrac{1-v^2}{1-v^2}\right)^2}.$$

Mettant enfin à la place de x, y, z les expressions (22), on trouve, pour exprimer x', y', z' en fonction rationnelle de v, les formules suivantes :

$$x' = \frac{\lambda^2\left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2}\left[\mathrm{B}\,\frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2} + b\mathrm{A}\,\frac{4v(1-v^2)}{(1-v^2)}\,\frac{1-v^2}{2v}\right],$$

$$y' = \frac{\lambda^2\left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2}\left[\mathrm{A}\,\frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2}\,\frac{1-v^2}{2v} - b\mathrm{B}\,\frac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2}\right],$$

$$z' = \frac{c(1-v^2)}{1+v^2}.$$

13. On peut se servir des équations (2), où p sera toujours supposé commensurable, pour obtenir une infinité de classes de courbes algébriques dont les arcs s'expriment exactement par des arcs de cercle. Il n'y a pour cela qu'à reprendre la formule (5), qui donne l'élément d'une quelconque des courbes Σ représentées par ces équations, en posant $4ab(p^2-1)+c^2=0$; d'où

$$c = 2\sqrt{ab(1-p^2)}. \tag{23}$$

Il vient en effet

$$ds = d\zeta\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2};$$

mettant pour c^2 sa valeur, on a

$$\begin{aligned}[p(a+b)+a-b]^2+c^2 &= [p(a+b)+a-b]^2+4ab(1-p^2)\\ &= [p(a-b)+a+b]^2;\end{aligned}$$

par suite

$$ds = [p(a-b)+a+b]\,d\zeta.$$

D'après la formule (23), la valeur de c sera réelle, quel que soit le signe de p, si p est moindre que l'unité, a et b étant de même signe, ou si p est plus grand que l'unité, a et b étant de signes contraires. Les valeurs de x, y, z deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta,\\ y &= a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta,\\ z &= 2\sqrt{ab(1-p^2)}\sin\zeta. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Ainsi, les courbes algébriques déterminées par ces trois équations sont telles que leurs arcs s'expriment exactement par des arcs de cercle. On remarquera que les valeurs de a et b restent arbitraires, de sorte qu'à chaque valeur de p répondent une infinité de courbes.

Examinons quelques cas particuliers :

1° Soit $p=0$, a et b étant de même signe. Les formules (23) et (24) donnent

$$c = 2\sqrt{ab},\quad x = (a+b)\cos\zeta,\quad y = (a-b)\sin\zeta,\quad z = 2\sqrt{ab}\sin\zeta,$$

d'où

$$\frac{y}{z} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

ce qui montre que chacune des courbes Σ est située dans un plan passant par l'axe des x. D'un autre côté, l'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{4ab}{c^2} z^2 = (a+b)^2$$

devient celle d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2;$$

donc, dans le cas actuel, on tombe sur des cercles.

2° Faisons $p = \frac{1}{2}$, a et b étant encore de même signe. Il vient

$$x = a\cos\frac{3\zeta}{2} + b\cos\frac{\zeta}{2}, \quad y = a\sin\frac{3\zeta}{2} - b\sin\frac{\zeta}{2},$$

et, en remplaçant $\cos\frac{3\zeta}{2}$, $\sin\frac{3\zeta}{2}$ par les expressions

$$\cos\frac{3\zeta}{2} = 4\cos^3\frac{\zeta}{2} - 3\cos\frac{\zeta}{2}, \quad \sin\frac{3\zeta}{2} = 3\sin\frac{\zeta}{2} - 4\sin^3\frac{\zeta}{2},$$

on trouve

$$x = \quad 4a\cos^3\frac{\zeta}{2} + (b-3a)\cos\frac{\zeta}{2},$$
$$y = -4a\sin^3\frac{\zeta}{2} + (3a-b)\sin\frac{\zeta}{2}.$$

Posons $b = 3a$, ce qui est permis, puisque a et b sont de même signe. Les deux dernières formules deviennent

$$x = 4a\cos^3\frac{\zeta}{2}, \quad y = -4a\sin^3\frac{\zeta}{2};$$

d'où l'on déduit, pour l'équation de la projection de la courbe sur le plan xy,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}}.$$

Cette projection est donc l'hypocycloïde bien connue se rapportant au cas où le rayon du cercle mobile serait égal à a et celui du cercle fixe à $4a$.

La formule (23) donne $c = 3a$, $\frac{4ab}{c^2} = \frac{4}{3}$, en sorte que l'ellipsoïde de révolution sur lequel la courbe est située a pour équation

$$x^2 + y^2 + \tfrac{4}{3}z^2 = 16a^2.$$

3° a et b étant supposés de signes contraires, faisons $p = 2$, ce qui donne $c^2 = -12ab$, $\frac{4ab}{c^2} = -\frac{1}{3}$. D'abord la courbe est située sur un hyperboloïde de révolution à une nappe déterminé par l'équation (16), laquelle devient ici

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = (a + b)^2;$$

et si l'on avait en outre $a + b = 0$, cet hyperboloïde se changerait en un cône du second degré ayant son sommet à l'origine des coordonnées.

Pour former l'équation de la projection de la courbe sur le plan xy, on se servira des expressions de x et y déduites des deux premières équations (24), à savoir :

$$x = a\cos 3\zeta + b\cos\zeta, \quad y = a\sin 3\zeta + b\sin\zeta.$$

On en conclut

$$\frac{y}{x} = \frac{a\sin 3\zeta + b\sin\zeta}{a\cos 3\zeta + b\cos\zeta},$$

et en exprimant, comme on l'a fait au n° **10**, le second membre en fonction de $u^2 = x^2 + y^2$, on obtient l'équation

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}}\,\frac{A(u^2 + a^2 - b^2) - B[u^2 - (a-b)^2]}{B(u^2 + a^2 - b^2) + A[(a+b)^2 - u^2]}.$$

Ici l'hypothèse $p = 2$ donne

$$A = 3 - \frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2} = \frac{4(u^2 - a^2 - b^2 + ab)}{u^2 - (a-b)^2},$$

$$B = 1 - 3\,\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2} = \frac{4(u^2 - a^2 - b^2 - ab)}{u^2 - (a-b)^2}:$$

par suite

$$A(u^2+a^2-b^2)-B[u^2-(a-b)^2]$$
$$=4\frac{(u^2-a^2-b^2+ab)(u^2+a^2-b^2)-(u^2-a^2-b^2-ab)[u^2-(a-b)^2]}{u^2-(a-b)^2}$$
$$=\frac{8a^2[u^2-a(a-b)]}{u^2-(a-b)^2},$$

$$B(u^2+a^2-b^2)+A[(a+b)^2-u^2]$$
$$=4\frac{(u^2-a^2-b^2-ab)(u^2+a^2-b^2)+(u^2-a^2-b^2+ab)[(a+b)^2-u^2]}{u^2-(a-b)^2}$$
$$=\frac{8a^2[u^2-a(a+b)]}{u^2-(a-b)^2}.$$

On trouve enfin, pour l'équation de la projection de la courbe sur le plan xy,

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}\,\frac{u^2-a(a-b)}{u^2-a(a+b)}}$$

ou bien

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{(a+b)^2-x^2-y^2}{x^2+y^2-(a-b)^2}\,\frac{x^2+y^2-a(a-b)}{x^2+y^2-a(a+b)}}.$$

14. A l'aide des équations (2) on peut encore déterminer une infinité de classes de courbes algébriques dont les arcs offrent la représentation exacte de la fonction elliptique de deuxième espèce à module quelconque.

Considérons une quelconque des courbes déterminées par ces équations. En vertu de la formule (5), l'arc indéfini s a pour expression

$$s=\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\int d\zeta\sqrt{1-\frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sin^2\zeta},$$

et l'on voit qu'il s'exprimera par la fonction elliptique de deuxième espèce, si le rapport

$$\frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}$$

est une quantité positive moindre que l'unité. D'abord cela a lieu, quel que soit c, si l'on a $p>1$, a et b étant de même signe, ou si

$p < 1$, a et b étant de signes contraires : car le numérateur est positif, et de plus il est moindre que le dénominateur, en vertu de l'identité

$$(25)\quad [p(a+b)+a-b]^2 - 4ab(p^2-1) = [p(a-b)+a+b]^2.$$

Supposons, en second lieu, $p > 1$, a et b étant de signes contraires, ou bien $p < 1$, a et b étant de même signe, ce qui revient à la condition $ab(p^2-1) < 0$. Faisons

$$(26)\qquad \frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2} = k^2,$$

k étant une quantité moindre que l'unité, qu'on se donne à volonté. On en déduit

$$c^2 = \frac{k^2}{1-k^2}[p(a+b)+a-b]^2 - \frac{4ab(p^2-1)}{1-k^2},$$

et l'on reconnaît que c^2 est positif, ou c réel, puisque le terme

$$-\frac{4ab(p^2-1)}{1-k^2}$$

est positif. En outre, le numérateur $4ab(p^2-1)+c^2$ est rendu positif par cette valeur de c^2, le premier membre de l'équation (26) étant une quantité positive égale à k^2 ; et d'ailleurs on le vérifie aisément, car on a

$$\begin{aligned}4ab(p^2-1)+c^2 &= 4ab(p^2-1)+\frac{k^2}{1-k^2}[p(a+b)+a-b]^2 - \frac{4ab(p^2-1)}{1-k^2}\\ &= \frac{k^2}{1-k^2}[p(a-b)+a+b]^2.\end{aligned}$$

Ainsi, dans l'hypothèse $ab(p^2-1) < 0$, on peut attribuer à c une valeur réelle qui rende le multiplicateur de $-\sin^2\zeta$, dans l'expression de l'arc s, égal à une fraction positive quelconque k^2. Cela revient à dire qu'on peut représenter une fonction elliptique de deuxième espèce, quel qu'en soit le module, par les arcs d'une infinité de courbes algébriques. A chaque valeur de p répondra une classe de ces courbes, puisque les valeurs de a et b restent arbitraires, sauf leurs signes respectifs.

Réciproquement, dans la même hypothèse $ab(p^2-1)<0$, si l'on se donne une valeur quelconque pour c, mais telle que $4ab(p^2-1)+c^2$ soit positif, ou qu'on ait $c>2\sqrt{ab(1-p^2)}$, l'arc s représentera une fonction elliptique de deuxième espèce; car, d'après la formule (25), le multiplicateur de $-\sin^2\zeta$ sera évidemment une fraction positive.

Donc, si l'on satisfait aux deux conditions

$$ab(p^2-1)<0, \quad c>2\sqrt{ab(1-p^2)},$$

l'arc s s'exprimera toujours par une fonction elliptique de deuxième espèce ; et de plus, étant donnée une fonction elliptique de deuxième espèce à module quelconque, il existera une infinité de classes de courbes algébriques dont les arcs en offriront la représentation géométrique.

Appliquons ce qui précède à quelques cas particuliers. Soit d'abord $p=0$; les équations (2) deviennent

$$x=(a+b)\cos\zeta, \quad y=(a-b)\sin\zeta, \quad z=c\sin\zeta,$$

et l'on en déduit

$$x^2+y^2+\frac{4ab}{c^2}z^2=(a+b)^2, \quad \frac{y}{z}=\frac{a-b}{c}.$$

Par où l'on voit que la courbe que nous considérons est donnée par l'intersection d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde de révolution et d'un plan passant par l'axe des x, c'est-à-dire que cette courbe est une ellipse, puisque l'arc s s'exprime par un arc elliptique. Le carré du module de la fonction elliptique de deuxième espèce représentée par l'arc s est ici $\frac{c^2-4ab}{(a-b)^2+c^2}$, ce qui exige $c^2>4ab$; moyennant cette condition, on est sûr que le rapport dont il s'agit est positif et moindre que l'unité, quelles que soient les valeurs de a, b et c. Si l'on se donnait réciproquement un module k, il faudrait satisfaire à l'équation

$$\frac{c^2-4ab}{(a-b)^2+c^2}=k^2,$$

d'où

$$c^2=\frac{k^2(a-b)^2}{1-k^2}+\frac{4ab}{1-k^2}.$$

Admettons qu'on prenne a et b de même signe : cette valeur de c^2 sera admissible, en même temps que celle de $c^2 - 4ab$, en vertu de l'expression de k^2.

Faisons, en second lieu, $p = 1$. Les constantes a, b, c étant laissées arbitraires, il y aura une classe de courbes répondant à cette hypothèse et dont une quelconque sera déterminée par les équations

$$(27) \qquad x = a\cos 2\zeta + b, \quad y = a\sin 2\zeta, \quad z = c\sin\zeta,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + \frac{4ab}{c^2}z^2 = (a+b)^2, \quad (x-b)^2 + y^2 = a^2.$$

Cette courbe est donc l'intersection d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde de révolution et d'un cylindre de révolution. Les axes de ces deux surfaces sont parallèles, et l'on remarquera en outre que le cercle servant de base au cylindre est tangent à celui qui est la trace de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde sur le plan xy, ce qui résulte visiblement de ce que ces deux cercles ont pour équations

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = (a+b)^2.$$

Le carré du module de la fonction elliptique de deuxième espèce représentée par l'arc de la courbe est ici égal à $\frac{c^2}{4a^2+c^2}$, et ce module peut être supposé quelconque; car, si l'on fait $\frac{c^2}{4a^2+c^2} = k^2$, k étant une fraction donnée, on en déduit pour c une valeur réelle

$$c = \frac{2ak}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que la courbe représentée par les équations (27) est une courbe gauche, en admettant toutefois qu'aucun des deux paramètres a et c ne soit nul. Supposons, en effet, qu'elle soit plane et que son plan ait pour équation

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

il faudrait qu'en substituant les valeurs de x, y, z en fonction de ζ,

cette équation fût identiquement satisfaite. Or cette substitution donne

$$A(a\cos 2\zeta + b) + Ba\sin 2\zeta + Cc\sin\zeta + D = 0;$$

et, en faisant successivement $\zeta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, on trouve

$$A(a+b) + D = 0,$$
$$Ab + Ba + \frac{Cc}{\sqrt{2}} + D = 0,$$
$$A(b-a) + Cc + D = 0,$$
$$A(b-a) - Cc + D = 0.$$

Mais des deux dernières relations on tire $2Cc = 0$, d'où $C = 0$. Puis la première et la troisième donnent $Ab + D = 0$, et au moyen de la deuxième on obtient $B = 0$; d'un autre côté, la troisième devient $-Aa = 0$, d'où $A = 0$, et l'on a dès lors $D = 0$. Donc le plan dont il s'agit n'existe pas, c'est-à-dire que la courbe n'est point plane.

15. Un dernier cas à signaler est celui où les courbes Σ seraient des courbes sphériques, en prenant pour centre de sphère le point O. Si l'on exprime que la quantité $x^2 + y^2 + z^2$ est constante, on obtient, en vertu de la formule (3), la condition

$$4ab - c^2 = 0,$$

en sorte que a et b doivent être de même signe. On a donc $c = 2\sqrt{ab}$, et le rayon de la sphère sur laquelle les courbes Σ sont situées est

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a + b.$$

La formule (5) devient

$$ds = d\zeta\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2 + 4ab}\sqrt{1 - \frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+4ab}\sin^2\zeta},$$

ce qui montre que l'arc s s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce. Je dis, en outre, que cet arc peut représenter une fonction quelconque de deuxième espèce ayant pour module k.

Il faut poser la relation

$$\frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+4ab}=k^2.$$

qui déterminera $\frac{b}{a}$. On la mettra sous la forme

$$(p-1)^2\frac{b^2}{a^2}+2\left[p^2-1-2\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)\right]\frac{b}{a}+(p+1)^2=0,$$

et l'on trouvera

$$\frac{b}{a}=\frac{2\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)-(p^2-1)\pm 2p\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)}}{(p-1)^2}.$$

Par où l'on voit que, pour que les deux valeurs de $\frac{b}{a}$ soient réelles, il faut qu'on ait $\frac{p^2}{k^2}-1>0$, c'est-à-dire que le nombre commensurable p doit être plus grand que k.

Dans le cas où $p=1$, l'équation qui détermine $\frac{a}{b}$ s'abaisse au premier degré et donne $\frac{b}{a}=\frac{k^2}{1-k^2}$; la courbe Σ est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre représentés par les équations

$$x^2+y^2+z^2=(a+b)^2,\quad (x-b)^2+y^2=a^2,$$

où b doit être remplacé par $\frac{ak^2}{1-k^2}$. Si l'on fait $k^2=\frac{1}{2}$, on aura $b=a$, et le rayon de la base du cylindre sera la moitié du rayon de la sphère. On reconnaît par là que la courbe Σ est la même que la courbe sphérique par laquelle se résout le problème de Viviani, en sorte que l'arc de cette dernière courbe s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce ayant pour module $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Sur les courbes de troisième classe;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Soit une courbe de troisième classe $\mathfrak{K}^3 = K^6$, représentée par l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$; si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ est l'équation mixte de la courbe.

En posant $U = (a, b, c, d)$, je prendrai, pour forme canonique de U, l'expression réduite $a\lambda^3 + d\mu^3$; de plus, je représenterai par (A, B, C) le hessien H de U, en sorte que l'on aura

$$A = ac - b^2, \quad 2B = ad - bc, \quad C = bd - c^2.$$

La courbe $\mathfrak{K}^3$ est une courbe du sixième ordre K^6, dont l'équation cartésienne s'obtient en égalant à zéro le discriminant Δ de la forme U. En adoptant les notations de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* [*], je représenterai par Θ le contrevariant de F, qui, égalé à zéro, donne l'équation de la cayleyenne G^3 de $\mathfrak{K}^3$.

2. En désignant respectivement par

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \text{et} \quad \varpi = \lambda q - \mu p = 0$$

[*] *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I. Les renvois à ce Mémoire sont indiqués par la désignation (F. B.).

l'équation mixte de la conique polaire de la droite de l'infini et l'équation mixte du pôle de cette droite relativement à $\mathfrak{K}^3$, les formules (6) et (11) du Mémoire déjà cité donnent immédiatement, en posant

$$\frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dy} = \Delta_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dx} = -\Delta_2 \text{ [*]},$$

le système de formules suivant :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\Delta_1 + b\Delta_2 - 2A\Theta, \\ \Delta\beta &= b\Delta_1 + c\Delta_2 - 2B\Theta, \\ \Delta\gamma &= c\Delta_1 + d\Delta_2 - 2C\Theta; \end{aligned}$$

ou, sous forme canonique (1),

$$\Delta\alpha = a\Delta_1, \quad \Delta\beta = -ad\Theta, \quad \Delta\gamma = d\Delta_2,$$

puis

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{da}{dx} = 0, && \frac{db}{dx} = -\alpha, && \frac{dc}{dx} = -2\beta, && \frac{d^2d}{dx} = -3\gamma, \\ &\frac{da}{dy} = 3\alpha, && \frac{db}{dy} = 2\beta, && \frac{dc}{dy} = \gamma, && \frac{d^2d}{dy} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dx} = 0, && \frac{d\beta}{dx} = -q, && \frac{d\gamma}{dx} = 2p, \\ &\frac{d\alpha}{dy} = 2q, && \frac{d\beta}{dy} = -p, && \frac{d\gamma}{dy} = 0. \end{aligned} \right.$$

J'y joindrai encore les formules suivantes, que l'on déduit facilement des précédentes, et que j'écris sous forme canonique, en y faisant b et c égaux à zéro :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dA}{dx} = -2a\beta, && 2\frac{dB}{dx} = -3a\gamma, && \frac{dC}{dx} = -d\alpha, \\ &\frac{dA}{dy} = a\gamma, && 2\frac{dB}{dy} = 3d\alpha, && \frac{dC}{dy} = 2d\beta. \end{aligned} \right.$$

---

[*] En général, Z désignant une fonction de x et de y du degré n, je poserai

$$Z_1 = \frac{1}{n}\frac{dZ}{dy}, \quad Z_2 = -\frac{1}{n}\frac{dZ}{dx}.$$

On en déduit l'expression de p et de q, en partant de l'identité

$$\Theta = A\gamma + 2B\beta + C\alpha, \qquad \text{(F. B., n° 18)}$$

qui, dérivée successivement par rapport à x et y, donne les deux relations

$$(5) \qquad 3\Theta_1 = adp + a\gamma^2 - d\alpha\beta, \quad 3\Theta_2 = -adq + d\alpha^2 - a\beta\gamma.$$

3. En représentant par $W(\lambda, \mu) = 0$ l'équation mixte de la hessienne $\mathfrak{H}^3$ de la courbe, on a, sous forme canonique (F. B., n° 9),

$$W = \begin{vmatrix} a\lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & d\mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & \lambda q - \mu p \end{vmatrix}$$
$$= ad\lambda\mu(\lambda q - \mu p) - d\mu(\alpha\lambda + \beta\mu)^2 - a\lambda(\beta\lambda + \gamma\mu)^2,$$

ou, en développant le second membre et en remplaçant p et q par leurs valeurs déduites des équations (5),

$$W = -3(\lambda\Theta_2 + \mu\Theta_1)\lambda\mu - 3\lambda\mu\beta(a\gamma\lambda + d\alpha\mu) - \beta^2(\alpha\lambda^3 + d\mu^3);$$

ou encore, en multipliant les deux membres par $a^2d^2 = \Delta$, et en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs,

$$\Delta W = 3ad\lambda\mu \frac{ad\lambda(\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2) + ad\mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)}{\Delta} - \Theta^2(a\lambda^3 + d\mu^3),$$

d'où, enfin, en passant de la forme canonique à la forme générale,

$$\Delta W = 6H(\lambda, \mu) \frac{(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu)}{\Delta} - \Theta^2 U(\lambda, \mu).$$

Pour abréger, je poserai

$$(6) \quad \tfrac{1}{6}\Delta(\lambda\mathfrak{X} - \mu\mathfrak{Y}) = (\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu),$$

où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ désignent des polynômes du cinquième degré en x et y, et

l'équation mixte de la hessienne sera donnée par la formule suivante :

$$(7)\qquad \Delta W(\lambda, \mu) = H(\lambda, \mu)(\lambda \mathfrak{P} - \mu \mathfrak{X}) - \Theta^2 U(\lambda, \mu).$$

4. L'équation mixte du pôle de la droite de l'infini étant

$$\varpi = \lambda q - \mu p = 0,$$

on déduit, des équations (5), la relation suivante :

$$(8)\quad \Delta^2 \varpi = a\Delta_1^2 \lambda + d\Delta_2^2 \mu + ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - 3\Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - 3\Delta\Theta_1)].$$

En désignant toujours par $\Pi = 0$ l'équation de la conique polaire de la droite de l'infini, par $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations de la conique polaire et du pôle de la droite,

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

on aura d'abord (F. B., n° 18),

$$(9)\qquad \Delta\Pi_\omega = a\mathfrak{r}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\omega\Theta\lambda\mu,$$

formule où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathfrak{r} = -v\Delta + \omega\Delta_1, \quad \mathfrak{y} = u\Delta + \omega\Delta_2;$$

puis (F. B., n° 11),

$$\varpi_\omega = u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi.$$

Substituons, dans cette expression, les valeurs de ϖ, Π_1, Π_2, ..., tirées des relations précédentes, il viendra

$$\begin{aligned}\Delta^2\varpi_\omega = {} & a\lambda\mathfrak{r}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{r}) \\ & + \omega^2 ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)],\end{aligned}$$

ou encore, en vertu de l'identité (6),

$$(11)\quad \Delta^2\varpi_\omega = a\lambda\mathfrak{r}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{r}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{P} - \mu\mathfrak{X}).$$

II.

5. La courbe $\mathfrak{K}^3$ et sa hessienne $\mathfrak{H}^3$ déterminent un faisceau tangentiel ; en désignant, pour un instant, par $F_0(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de la hessienne, et par ρ un paramètre arbitraire, l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation tangentielle $F + 6\rho F_0 = 0$; je la désignerai par la notation $\mathfrak{K}_\rho$. Son équation mixte étant $U_\rho = 0$, la relation (7) donne immédiatement

$$(10) \qquad \Delta U_\rho = 6\rho H(\lambda, \mu)(\lambda \mathfrak{Y} - \mu \mathfrak{X}) + (\Delta - 6\rho\Theta^2) U(\lambda, \mu).$$

Les deux courbes du sixième ordre K^6 et $(G^3)^2$ déterminent également un faisceau ponctuel ; l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0;$$

je la désignerai par la notation K_ρ, et je dirai que deux courbes des faisceaux (K_ρ) et $(\mathfrak{K}_\rho)$, données par la même valeur de ρ, sont *correspondantes*.

6. Cherchons d'abord la signification géométrique des polynômes $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ qui s'introduisent, comme on l'a vu, d'une façon si simple et si naturelle, dans la recherche de l'équation mixte de la hessienne.

Soit M un point du plan, dont les coordonnées soient x et y; par ce point passe une courbe du faisceau (K_ρ), la valeur du paramètre ρ correspondant à cette courbe étant déterminée par la relation

$$(12) \qquad \Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

Le coefficient angulaire $\frac{\mu'}{\lambda'}$ de la tangente menée, en ce point, à la courbe est donné par la relation

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Delta^2 - 6\rho\Theta\Theta_2}{\Delta_1 - 6\rho\Theta\Theta_1}.$$

ou, si l'on remplace ρ par sa valeur déduite de l'équation (12),

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2}{\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1}.$$

De là et de l'équation (6) résulte l'identité suivante :

$$(13) \qquad \lambda \mathfrak{Y} - \mu \mathfrak{X} = \lambda'(A\lambda + B\mu) + \mu'(B\lambda + C\mu),$$

dont il est facile de voir la signification géométrique.

7. A cet effet, je remarque que, du point M, on peut mener à la courbe $\mathfrak{K}^3$ trois tangentes dont les coefficients angulaires sont déterminés par l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$. L'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ détermine également les coefficients angulaires de deux droites passant par le même point : je dirai que ces droites sont les *hessiennes du point* M *relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$. Je dirai encore que la droite passant par le point M, et ayant pour coefficient angulaire $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}}$ est l'*axe de ce point relativement à la courbe*. Cela posé, de l'équation (12) résulte la proposition suivante :

Si en un point M *du plan on considère l'axe et les hessiennes de ce point relativement à cette courbe, la conjuguée harmonique de l'axe, relativement aux hessiennes, se confond avec la tangente, menée au point* M, *à la courbe du faisceau* K_ρ *qui passe en ce point.*

8. Imaginons qu'une droite se meuve tangentiellement à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$; le lieu des intersections de cette droite avec sa conique polaire relativement à $\mathfrak{K}^3$ s'obtient en éliminant λ et μ entre l'équation mixte de $\mathfrak{K}_\rho$ et l'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ (F. B., n° 7); ou bien, en vertu de l'équation (10), en éliminant λ et μ entre les équations

$$H(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta - 6\rho\Theta^2}{\Delta} U(\lambda, \mu) = 0.$$

Le résultat de l'élimination est évidemment

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

Si une droite se meut tangentiellement à une courbe du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$),

le lieu des points où elle rencontre sa conique polaire, relativement à $\mathfrak{K}^3$, *est la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ).

9. Soit un point M ayant pour coordonnées x et y, et situé sur la courbe K_ρ, comme l'on a

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0,$$

il résulte, de l'équation (10), que les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$ sont déterminés par l'équation

$$H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0.$$

D'où ce théorème :

Les trois tangentes que, d'un point de la courbe $\mathfrak{K}_\rho$ *on peut mener à la courbe correspondante du faisceau* ($\mathfrak{K}_\rho$), *se confondent avec l'axe et les hessiennes de ce point relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

10. Considérons une courbe quelconque du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$); une tangente à cette courbe rencontre la courbe correspondante du faisceau (K_ρ) en six points, dont deux sont situés sur la conique polaire de la tangente, relativement à $\mathfrak{K}^3$ (n° 8). On sait, d'ailleurs, en vertu de la proposition précédente, que, par chacun de ces six points, la tangente considérée est un axe ou une hessienne de ce point relativement à $\mathfrak{K}^3$. Il est clair qu'elle est une hessienne pour les deux points situés sur la conique polaire, et seulement pour ces points; elle est donc un axe pour les quatre autres. D'où les conséquences suivantes :

Toute tangente à une courbe du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$) *rencontre la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ) *en six points; deux de ces points sont situés sur la conique polaire de la tangente relativement à* $\mathfrak{K}^3$. *Chacun des quatre autres jouit de la propriété que son axe, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *se confond avec la tangente considérée* [*].

L'enveloppe des axes, relativement à $\mathfrak{K}^3$, *des divers points d'une courbe quelconque du faisceau* (K_ρ), *est la courbe correspondante du faisceau* ($\mathfrak{K}_\rho$).

---

[*] Des théorèmes corrélatifs ont évidemment lieu relativement aux courbes du troisième ordre; j'ai déjà donné sans démonstration ces théorèmes dans une Note *Sur les courbes du troisième ordre,* insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique,* t. IV, p. 110.

11. Considérons un point M du plan ayant pour coordonnées ξ et η; l'équation de sa droite polaire, relativement à la courbe K^6, a pour équation

$$\omega = x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta} = 0.$$

Relativement à cette droite, on a

$$u = \frac{d\Delta}{d\xi},\quad v = \frac{d\Delta}{d\eta}\quad \text{et}\quad w = \frac{d\Delta}{d\zeta},$$

et, par suite,

$$6\mathfrak{x} = \left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dy} - 6\Delta\frac{d\Delta}{d\eta},$$

$$6\mathfrak{y} = -\left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dx} + 6\Delta\frac{d\Delta}{d\xi}.$$

On voit, par ces formules, que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent pour $x = \xi$ et $y = \eta$.

Désignons par D la droite précédente, et par m son pôle, relativement à la courbe $\mathfrak{K}^3$; l'équation mixte de ce pôle est (n° 4),

$$a\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{x}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0;$$

et le coefficient angulaire de la droite Mm est donné par la formule précédente, quand on y fait $x = \xi$ et $y = \eta$. Comme je l'ai fait voir, $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent alors, et le coefficient angulaire cherché est déterminé par l'équation $\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X} = 0$, où x et y doivent être respectivement remplacés par ξ et η.

D'où la proposition suivante :

Étant donné un point quelconque du plan M, *si l'on désigne par* m *le pôle, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *de la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6, *la droite* Mm *est l'axe du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

III.

12. L'équation mixte de la polaire de la droite

$$\omega = ux + vy + wz = 0$$

est

$$a\mathfrak{r}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\omega\Theta\lambda\mu = 0.$$

Supposons, comme ci-dessus, que la droite considérée soit la polaire, relativement à K^6, du point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ. Les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la conique polaire de la droite sont déterminés par l'équation précédente quand on y fait $x = \xi$ et $y = \eta$. Les fonctions $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{y}$ devenant alors identiquement nulles, l'équation se réduit à $H(\lambda, \mu) = 0$.

Donc :

Étant donné un point quelconque M *du plan, si l'on considère la droite polaire de ce point, relativement à la courbe* K^6, *puis la conique polaire de cette droite, relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *les tangentes menées du point* M *à cette conique sont les hessiennes du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$ [*].

15. Soit M un point du plan ayant pour coordonnées x et y. Supposons ce point placé sur la hessienne de $\mathfrak{K}^3$; on a alors $\Theta = 0$, et les coefficients angulaires des tangentes, menées du point M à la conique polaire de la droite $\omega = 0$, sont déterminés par les racines de l'équation

$$(14) \qquad a\mathfrak{r}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 = 0.$$

Il est facile d'interpréter géométriquement ce résultat. Désignons, pour un instant, par ξ, η, ζ les coordonnées courantes, et soit

$$\eta - y = k(x - \xi)$$

l'équation de la droite qui joint le point M au point où sa droite polaire, relativement à K^6, rencontre la droite $\omega = 0$.

---

[*] Il est à peine nécessaire de rappeler que $\mathfrak{K}^3$ et K^6 désignent la même courbe ; la première notation étant employée quand on considère cette courbe comme étant de troisième classe, et la seconde quand on la considère comme étant du sixième degré.

Le coefficient k se déterminera en exprimant que les trois droites

$$k\xi + \eta - \zeta(y + kx) = 0,$$
$$\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy}\zeta + \frac{d\Delta}{dz} = 0,$$
$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0$$

se coupent en un même point.

Un calcul facile donne

$$k = \frac{6u\Delta - \omega\frac{d\Delta}{dx}}{\omega\frac{d\Delta}{dy} - 6v\Delta} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}},$$

et de l'équation (14) résulte immédiatement la conséquence suivante :

Étant donnée une droite quelconque D *du plan, et étant pris arbitrairement un point* M *sur la cayleyenne de la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *désignons par* m *le point où la droite* D *est rencontrée par la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6. *Cela posé, les deux tangentes, que l'on peut du point* M *mener à la conique polaire de* D, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *sont les deux droites qui constituent la conique polaire de la droite* Mm, *relativement aux trois tangentes que l'on peut mener du point* M *à la courbe* $\mathfrak{K}^3$.

IV.

14. Les coniques polaires, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des diverses droites qui passent par un point donné M du plan, sont inscrites dans un quadrilatère dont les côtés ont pour pôle M. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point M ; il est facile d'obtenir en coordonnées cartésiennes l'équation des côtés de ce quadrilatère.

Considérons, en effet, les deux droites $x - \xi = 0$ et $y - \eta = 0$, qui se croisent au point M ; relativement à la première droite, on aura, en posant, pour abréger, $x - \xi = X$ et $y - \eta = Y$, $\omega = X$, $u = 1$, $v = 0$, et, par suite, $\mathfrak{x} = X\Delta_1$ et $\mathfrak{y} = \Delta + X\Delta_2$. Relativement à la seconde,

on aura $\omega = \mathrm{Y}$, $u = 0$, $v = 1$ et, par suite,

$$\mathfrak{x} = -\Delta + \mathrm{Y}\Delta_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{y} = \mathrm{Y}\Delta_2;$$

je désignerai ces deux dernières expressions par $\mathfrak{x}'$ et par $\mathfrak{y}'$.

Cela posé, les équations mixtes des coniques polaires des droites $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$ sont respectivement

$$\frac{a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\mathrm{X}\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a\mathfrak{x}'\lambda^2 + d\mathfrak{y}'\mu^2 - 2ad\mathrm{Y}\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0.$$

Si l'on représente par T le résultant de ces deux équations, il est clair que $\mathrm{T} = 0$ est l'équation des quatre tangentes communes aux polaires des diverses droites qui se croisent au point M.

Une formule bien connue donne

$$\begin{aligned}\Delta^4\mathrm{T} &= a^2d^2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{y}\mathfrak{x}' - 2ad\Theta^2\mathrm{XY})^2 \\ &\quad - 4(ad\mathfrak{x}\mathfrak{y} - \Delta\Theta^2\mathrm{X}^2)(ad\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' - \Delta\Theta^2\mathrm{Y}^2) \\ &= a^2d^2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')^2 + 4\Delta\Theta^2 ad(\mathrm{Y}\mathfrak{x} - \mathrm{X}\mathfrak{x}')(\mathrm{Y}\mathfrak{y} - \mathrm{X}\mathfrak{y}').\end{aligned}$$

En remplaçant $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$ et $\mathfrak{y}'$ par leurs valeurs données ci-dessus, un calcul facile donne

$$\begin{gathered}\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}' = \frac{\Delta}{6}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right), \\ \mathrm{Y}\mathfrak{y} - \mathrm{X}\mathfrak{x}' = \mathrm{X}\Delta \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}\mathfrak{y} - \mathrm{X}\mathfrak{y}' = \mathrm{Y}\Delta.\end{gathered}$$

Il vient donc définitivement

$$(15) \qquad \Delta\mathrm{T} = \frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2 + 4\,\Theta^2\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y}).$$

15. On peut donc remarquer que l'équation

$$\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz} = 0$$

représente la polaire P du point M, relativement à la courbe K^6. De l'équation (15) résulte que les quatre tangentes communes aux coni-

ques polaires des droites qui se croisent au point M rencontrent la cayleyenne de $\mathfrak{K}^3$ aux points où cette courbe rencontre P, les neuf points de rebroussement de $\mathfrak{K}^3$ étant exceptés. Ces points de rencontre sont évidemment, d'ailleurs, au nombre de six, et chacun d'eux doit être compté deux fois.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les tangentes communes aux coniques polaires des diverses droites qui se croisent en un point M *forment un quadrilatère dont les six sommets sont situés à la fois sur la cayleyenne et sur la première polaire du point* M, *relativement à la courbe* K^6.

16. Si l'on considère x, y et z comme des quantités données, coordonnées d'un point N du plan, et ξ, η, ζ comme des coordonnées variables, il est clair que l'équation

$$\frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx}+\eta\frac{d\Delta}{dy}+\zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2+4\Theta^2 H(X,Y)=0$$

représente le lieu des pôles, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des droites que l'on peut mener par le point N. On voit que ce lieu est une conique; l'équation $H(X,Y)=0$ représente les hessiennes du point N. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites, qui passent par un point donné* N, *est une conique tangente aux deux hessiennes du point* N, *et la corde de contact est la polaire du point* N, *relativement à* K^6.

Si le point N est sur la cayleyenne, $\Theta=0$, et l'équation précédente se réduit à son premier terme. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites, qui passent par un point donné de la cayleyenne de cette courbe, est la polaire de ce point relativement à* K^6.

Sur le calcul inverse des intégrales définies;

Par M. H. LAURENT.

Nous ne connaissons que fort peu de chose sur le calcul inverse des intégrales définies, et cependant ce calcul se présente assez souvent dans les questions de Physique mathématique. La figure des planètes en dépend; ainsi, quand on cherche si l'ellipsoïde à trois axes inégaux peut être une figure d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, on ne fait que résoudre un cas très-particulier d'une question qui dépendrait du calcul inverse des intégrales définies. Abel, dans un Mémoire posthume qui traite des fonctions génératrices, fait l'ébauche très-incomplète d'une théorie dont il tire des conséquences vraiment surprenantes; cette théorie dépend du calcul inverse des intégrales définies. Et l'on pourrait encore citer beaucoup d'exemples dans lesquels le calcul inverse des intégrales définies pourrait rendre d'importants services à la Science, et surtout à la Physique mathématique. Je me propose dans ce Mémoire d'étudier seulement quelques questions relatives à la théorie dont je viens de parler, et les plus simples; on verra que d'autres questions importantes, et en apparence très-étrangères au sujet, s'y rattachent.

1. De tous les problèmes, le plus simple que l'on puisse se poser sur le calcul inverse des intégrales définies consiste à trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 0.$$

Un tel problème admet évidemment une infinité de solutions, et l'on peut se proposer d'en trouver la solution la plus générale. Soit $f(x)$ une fonction arbitraire de x; si l'on pose

$$\varphi(x) = f(x) - \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx,$$

l'équation (1) sera satisfaite, et je dis que l'on aura ainsi la solution la plus générale de cette équation. En effet, soit $\varphi(x)$ la solution la plus générale : on peut la présenter sous la forme

$$\varphi(x) - \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{b-a},$$

puisque $\int_a^b \varphi(x) dx$ est nul. L'expression à laquelle on vient de parvenir joue dans le calcul inverse des intégrales définies le rôle des constantes arbitraires dans le Calcul intégral ordinaire. Ainsi je suppose qu'il s'agisse maintenant de résoudre l'équation

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi(x) dx = g.$$

Quand on aura trouvé une seule solution de cette équation, il suffira de lui ajouter une expression de la forme $f(x) - \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx$ pour en obtenir la solution la plus générale. En effet, soient $\varphi(x)$ la solution la plus générale de (2), $\psi(x)$ une solution particulière, on aura :

$$\int_a^b \varphi(x) dx = g,$$

$$\int_a^b \psi(x) dx = g$$

ou

$$\int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)] dx = 0;$$

$\varphi(x) - \psi(x)$ a donc pour valeur générale la solution de l'équation (1), ce qui établit la proposition avancée. Nous ferons d'ailleurs

observer qu'une solution particulière de (2) est donnée par la formule

$$\varphi(x) = \frac{g}{b-a};$$

mais la plupart des problèmes que l'on peut se proposer sur le calcul inverse des intégrales définies affectent une forme plus compliquée : il s'agit souvent de déterminer une fonction $\varphi(u)$, de telle sorte que l'on ait

$$(3) \qquad \int_a^b \theta(u,x)\varphi(u)du = f(x).$$

$\theta(u,x)$ désigne alors une fonction donnée de u et de x, et $f(x)$ une fonction donnée également.

L'équation (3) *n'admet généralement pas de solution.* En effet, supposons que $f(x)$ devienne infinie pour $x = x_1$, le premier membre de (3) devra être infini pour $x = x_1$; ainsi on devra avoir

$$\theta(u,x_1)\varphi(u) = \infty.$$

On ne peut pas admettre que $\varphi(u)$ soit infini, sans quoi le premier membre de (3) serait toujours infini [pour parler plus exactement : si $\varphi(u)$ a un infini de nature à rendre l'intégrale infinie, comme cet infini est indépendant de x, il rendra l'intégrale infinie dans le cas même où x serait différent de x_1]: donc $\theta(u,x_1)$ est infini; mais alors, u variant le long du contour d'intégration, l'équation

$$\theta(u,x) = \infty$$

définit une fonction x de u, pour laquelle θ reste infinie. La fonction $f(x)$ devrait donc être infinie pour une suite continue de valeurs de x, ce qui est en général impossible. On voit donc qu'en se maintenant dans ces généralités le problème en question est impossible.

Que si, cependant, la fonction $\theta(u,x)$ était réductible, et si l'équation

$$\theta(u,x) = \infty$$

ne définissait pas une fonction x de u, notre raisonnement tomberait en défaut; mais, en général, il n'en est pas ainsi.

Abel, dans sa théorie des fonctions génératrices, admet que l'on peut toujours satisfaire à l'équation

$$\int_a^b e^{-ux}\varphi(u)\,du = f(x)$$

(il est vrai qu'il ne spécifie pas la nature des limites); il est évident que $\frac{1}{x}$, par exemple, ne saurait être représenté par une expression telle que le premier membre de l'équation précédente. Si l'on n'a pas $b = +\infty$ et $a = 0$, il est clair aussi que l'on ne saurait prendre $f(x) = x$, parce que, pour $x = \infty$, $f(x)$ est toujours infini, tandis que $\int_a^b e^{-ux}\varphi(u)\,du$ ne l'est pas nécessairement.

Toutefois, s'il n'est pas possible de représenter une fonction au moyen d'une intégrale définie tout le long de son parcours, on peut espérer de la représenter dans une portion limitée de ce parcours. Ces préliminaires nous apprennent que l'on ne doit pas, en général, étudier les fonctions définies par des intégrales, telles que les fonctions Γ de Legendre, sans essayer de changer leur forme. L'intégrale eulérienne de seconde espèce est impropre à définir la fonction Γ, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan; le produit considéré par Gauss la définit au contraire complétement et bien plus naturellement. Aussi ne faut-il point s'étonner que les propriétés des fonctions Γ découlent plus facilement de la définition de Gauss que de celle de Legendre.

2. Le problème qui consiste à résoudre, par rapport à $\varphi(x)$, l'équation

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$$

étant indéterminé, nous nous proposerons de résoudre les équations simultanées

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0, \quad \int_a^b x\varphi(x)\,dx = 0, \quad \ldots, \\ \displaystyle\int_a^b x^{n-1}\varphi(x)\,dx = 0, \end{cases}$$

ou plus généralement

$$(2) \qquad \int_a^b \theta(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

$\theta(x)$ désignant alors un polynôme arbitraire de degré $n-1$. Désignons par $\varphi^{-1}(x)$, $\varphi^{-2}(x)$, ..., $\varphi^{-n}(x)$ les intégrales successives de la fonction φ, prises de manière à s'annuler pour $x=a$. En intégrant par parties la formule (2), on trouve

$$\varphi^{-1}(b)\,\theta(b) - \varphi^{-2}(b)\,\theta'(b) + \varphi^{-3}(b)\,\theta''(b)\ldots \pm \varphi^{-n}(b)\,\theta^{(n-1)}(b) = 0,$$

$\theta^{n-1}(b)$ désignant une simple constante. Si l'on fait successivement $\theta = 1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, on voit que l'on aura

$$\varphi^{-1}(b) = 0, \quad \varphi^{-2}(b) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{-n}(b) = 0.$$

La fonction $\varphi^{-n}(x)$ s'annule donc, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, non-seulement pour $x=a$, mais encore pour $x=b$. On peut donc poser

$$\varphi^{-n}(x) = (x-a)^n (x-b)^n \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction qui n'est pas infinie pour $x=a$ ou pour $x=b$: il en résulte la solution suivante du problème que nous nous étions proposé de résoudre

$$(3) \qquad \varphi(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n (x-b)^n \psi(x)\right].$$

Nous allons maintenant discuter cette solution.

Considérons l'équation

$$(4) \qquad z = x + t\,\frac{(z-a)(z-b)}{b-a}$$

et la fonction

$$\psi^{-1}(z) = \int \psi(z)\,dz$$

de la racine de cette équation z qui, pour $t=0$, se réduit à x, à savoir :

$$z = \frac{b-a+t(b+a)-\sqrt{(b-a)[(t^2+1)(b-a)-4tx+2t(b+a)]}}{2t};$$

on aura, par la formule de Lagrange,

$$\psi^{-1}(z) = \psi^{-1}(x) + \frac{t}{1}\frac{(x-a)(x-b)\psi(x)}{b-a} + \cdots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)}{(b-a)^n}\right] + \cdots,$$

et, en différentiant par rapport à x,

$$\psi'(z)\frac{dz}{dx} = \psi(x) + \frac{t}{1}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\psi(x)\right] + \cdots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{(x-a)^n(x-b)^n}{(b-a)^n}\psi(x)\right] + \cdots,$$

la fonction $\varphi(x)$ n'étant définie qu'à un facteur près, on voit qu'elle a pour fonction génératrice $\psi(z)\frac{dz}{dx}$, z étant racine de l'équation (4), et nous poserons dorénavant

$$(5)\qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{(b-a)^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)].$$

3. Nous examinerons d'abord le cas où $\psi(x)$ se réduit à une constante que nous prendrons égale à l'unité. Nous aurons alors

$$(1)\qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{(b-a)^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n].$$

Les fonctions X_n de Legendre appartiennent à ce type, et l'on a, en supposant n et m entiers et différents l'un de l'autre,

$$(2)\qquad \begin{cases} \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \\ \int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx = \frac{b-a}{2n+1}, \end{cases}$$

formules que l'on vérifie aisément au moyen d'une intégration par parties.

La fonction $\varphi_n(x)$ vérifie une équation différentielle du second ordre qu'il sera alors facile d'intégrer complétement au moyen des quadratures. Si l'on pose

$$(x-a)^n(x-b)^n = u,$$

on en tire par différentiation

$$nu(2x-a-b) = \frac{du}{dx}(x-a)(x-b),$$

et, en différentiant $n+1$ fois de suite,

$$\begin{aligned} n\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}(2x-a-b) + 2n(n+1)\frac{d^n u}{dx^n} \\ = \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}(x-a)(x-b) + (n+1)(2x-a-b)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} \\ + (n+1)n\frac{d^n u}{dx^n}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}(x-a)(x-b) + (2x-a-b)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} - n(n+1)\frac{d^n u}{dx^n} = 0,$$

ou bien encore

$$(3) \quad \frac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x-a)(x-b) + \frac{d\varphi_n}{dx}(2x-a-b) - n(n+1)\varphi_n = 0.$$

Cette équation a une assez grande généralité, le polynôme

$$(x-a)(x-b)$$

étant l'expression la plus générale des polynômes du second degré et $2x-a-b$ celle de leur dérivée.

On constate facilement que l'intégrale

$$\int \frac{(z-a)^n(x-b)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

satisfait à l'équation (3), soit qu'on la prenne le long d'un contour fermé contenant le point x, ce qui fournit bien à un facteur près $\varphi_n(x)$, soit qu'on la prenne entre les limites a et b, ce qui fournit une seconde solution de l'équation (3); en appelant Φ_n cette seconde solution, la solution la plus générale de (3) sera

$$A\varphi_n + B\Phi_n,$$

où A et B désignent deux facteurs constants arbitraires. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ce cas d'ailleurs fort intéressant, parce que nous retomberions sur les propriétés bien connues des polynômes de Legendre, auxquels peuvent se ramener les polynômes φ_n par un simple changement de variable.

4. On obtient une classe de polynômes très-intéressants et déjà étudiés par M. Hermite quand on suppose $a = -\infty$ et $b = +\infty$; le produit $(x-a)^n(x-b)^n$ doit alors être remplacé par une fonction nulle pour $x = \pm\infty$ et admettant $\pm\infty$ pour racines multiples. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire conduit à remplacer $(x-a)^n(x-b)^n$ par l'exponentielle e^{-x^2}. Posons alors

$$\varphi_n = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n};$$

la fonction φ_n sera de la forme $e^{-x^2}U_n$, U_n désignant un polynôme entier en x qui jouira des propriétés exprimées par les équations suivantes :

$$U_{n+1} + 2x U_n + 2n U_n = 0,$$

d'où l'on conclut par la méthode de Sturm la réalité des racines de l'équation $U_n = 0$,

$$(1) \qquad \frac{d^2U_n}{dx^2} - 2x\frac{dU_n}{dx} + 2n U_n = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}U_m U_n dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}U_n^2 dx = 2.4.6\ldots 2n\sqrt{\pi}.$$

Sans vouloir faire ici une étude approfondie des polynômes de M. Hermite, je crois devoir faire, à leur égard, une remarque : c'est que l'intégrale

$$(2)\qquad V_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}(z-x)^{-(n+1)}dz$$

satisfait à l'équation (1), à laquelle satisfait aussi la fonction U_n, en sorte que l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$AU_n + BV_n = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit de différentier la formule (2); on a alors

$$(3)\qquad \frac{dV_n}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}\left[2x(z-x)^{-n-1} + (n+1)(z-x)^{-n-2}\right]dz,$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2V_n}{dx^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}[&(4x^2+2)(z-x)^{-n-1}\\ &+4x(n+1)(z-x)^{-n-2}\\ &+(n+1)(n+2)(z-x)^{-n-3}]dz.\end{aligned}\right.$$

Si l'on remarque alors que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}(n+1)(n+2)(z-x)^{-n-3}\,dz\\ = \int_{-\infty}^{+\infty} 2z(n+1)e^{x^2-z^2}(z-x)^{-n-2}\,dz,\end{aligned}$$

les équations (2), (3), (4), multipliées respectivement par $2n$, $-2x$, 1 et ajoutées, donnent

$$\frac{d^2V_n}{dx^2} - 2x\frac{dV}{dx} + 2nV_n = 0.$$

5. Si l'on prend $\varphi_n = \frac{d^n(x^n e^n)}{dx^n}$, on aura encore, en appelant θ un

polynôme quelconque de degré $n-1$,

$$\int_0^{\infty} \theta(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0.$$

Il est clair que, dans le cas actuel, φ_n est le produit, par $(-1)^n e^{-x}$, d'un certain polynôme entier du degré n en x, que nous appellerons P_n ou $P_n(x)$, et l'on a

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} P_n P_m e^{-x}\,dx = 0,$$

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} P_n^2 e^{-x}\,dx = 1.2.3\ldots n\Gamma(n+1) = \Gamma^2(n+1).$$

La première de ces formules est évidente; la seconde se démontre en appliquant la règle d'intégration par parties à l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{d^n(e^{-x}x^n)}{dx^n}\,x^n\,dx,$$

x^n désignant la quantité à laquelle se réduit P_n quand on supprime les termes en x^{n-1}, x^{n-2}, ...,

De la formule

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n e^{-x} = e^{-x}\,P_n(x)\,(-1)^n$$

on tire facilement la valeur de P_n

$$(3) \qquad P_n(x) = x^n - \frac{n^2}{1}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2}x^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 1.$$

Si nous posons, pour un instant,

$$u = x^n e^{-x},$$

nous aurons, en différentiant,

$$u' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$$

ou bien

$$u'x = (n - x)u;$$

si l'on différentie $n+1$ fois cette équation, et si l'on pose

$$Q_n = \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x} = (-1)^n e^{-x} P_n(x),$$

on aura

$$x\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + (n+1)\frac{dQ_n}{dx} = (n-x)\frac{dQ_n}{dx} - (n+1)Q_n.$$

ou bien

$$(4) \qquad x\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + (x+1)\frac{dQ_n}{dx} + (n+1)Q_n = 0.$$

Cette équation donne, en prenant P_n pour inconnue,

$$(5) \qquad x\frac{d^2 P_n}{dx^2} + (1-x)\frac{dP_n}{dx} + nP_n = 0.$$

On a, à un facteur près,

$$Q_n = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

ou

$$Q_n = \int \frac{e^{-z} z^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz,$$

l'intégrale étant prise autour du point x. Cherchons à vérifier que cette intégrale satisfait à l'équation (4) : à cet effet, observons que par la différentiation on constate que

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dz} e^{-z} z^{n+1} (z-x)^{-(n+2)} \\ &\quad = -(n+z)\, z^n (z-x)^{-(n+3)} e^{-z} \\ &\qquad - (1+x)\, z^n (z-x)^{-(n+2)} e^{-z} - r z^n (z-x)^{-(n+1)} e^{-z}; \end{aligned} \right.$$

en intégrant alors autour du point x et en observant que

$$\frac{dQ^n}{dx} = (n+1)\int \frac{e^{-z} z^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz.$$

$$\frac{d^2 Q^z}{dx^2} = (n+1)(n+2)\int \frac{e^{-z} z^n\,dz}{(z-x)^{n+2}},$$

on trouve, en divisant par $-(n+1)$,

$$0 = x\frac{d^2Q_n}{dx^2} + (1+x)\frac{dQ_n}{dx} + (n+1)Q_n.$$

Or, si l'on avait posé

$$X_n = \int_0^\infty \frac{e^{-z}z^n}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

la formule (A), intégrée entre les limites 0 et ∞, aurait donné par le même calcul

$$0 = x\frac{d^2X_n}{dx^2} + (1+x)\frac{dX_n}{dx} + (n+1)X_n,$$

ce qui prouve que X_n est aussi une solution de l'équation (4). Or nous avons vu que, si X_n était une solution de (4), $X_n e^x$ était une solution de (5). Nous poserons

$$\Pi_n = e^x X_n$$

et la fonction

$$\Pi_n = \int_0^\infty \frac{e^{x-z}z^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

sera une solution de l'équation (5). La solution la plus générale de (5) sera donc

$$AP_n + B\Pi_n,$$

A et B désignant deux quantités constantes. Toutefois, on sera obligé de supposer x négatif ou imaginaire de manière que l'intégrale Π_n reste finie.

On peut encore trouver d'autres expressions de la fonction P_n. Si, en effet, on considère la fonction Q_n sous la forme (elle n'est déterminée qu'à un facteur constant près)

$$Q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n),$$

on voit que, si l'on développe la fonction $-e^{-z}$, z étant racine de

$$z = x + tz, \quad z = \frac{x}{1-t},$$

on aura, par la formule de Lagrange,

$$-e^{\frac{x}{t-1}} = -e^{-x} + \frac{t}{1} x e^{-x} + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x} x^n \ldots$$

et, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{e^{\frac{x}{t-1}}}{1-t} = e^{-x} + \frac{t}{1} \frac{d}{dx}(xe^{-x}) + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\ldots.$$

Si l'on multiplie par e^x, les différents termes du second membre auraient pour coefficients les diverses valeurs de P_n, ainsi

$$\frac{e^{\frac{tx}{t-1}}}{1-t} = 1 + tP_1(x) + t^2 P_2(x) + \ldots + t^n P_n(x) + \ldots.$$

Et nous sommes ainsi conduits à définir P_n comme le coefficient de t^n dans le développement de $\frac{e^{\frac{tx}{t-1}}}{1-t}$; on aura donc

$$P_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{\frac{-tx}{1-t}}}{(1-t)\,t^{n+1}}\,dt,$$

l'intégrale étant prise autour du point $t=0$. Si l'on pose $\frac{t}{1-t} = z$, on a

$$P_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-zx}}{z^{n+1}}(z+1)^{n-1}\,dz,$$

l'intégrale étant toujours prise autour de l'origine.

Il est à peine nécessaire de faire observer que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles et positives.

6. Je passe maintenant à l'étude d'un cas important, parce qu'il va nous conduire à l'intégration d'une classe très-étendue de fonctions. Posons

(1) $$\varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}];$$

r et s désignant deux nombres quelconques. Si ces nombres sont positifs, la fonction φ_n sera encore une solution de notre problème ; mais, dans ce qui va suivre, nous leur supposerons des valeurs arbitraires. Faisons pour un instant

$$u = (x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s};$$

nous aurons

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{n+r}{x-a} + \frac{n+s}{x-b}$$

ou

$$(x-a)(x-b)\frac{du}{dx} = u[(2n+r+s)x-(n+r)b-(n+s)a].$$

Si l'on différentie cette équation $n+1$ fois de suite, on a

$$\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}(x-a)(x-b) + \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}[(2-r-s)x+rb+as+a-b] \\ -\frac{d^n u}{dx^n}(n+1)(n+r+s) = 0;$$

ce qui peut encore s'écrire, en vertu de (1),

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x-a)(x-b) + \frac{d\varphi_n}{dx}[(2-r-s)x+b(r-1)+a(s-1)] \\ \qquad -\varphi_n(n+1)(n+r+s) = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté, on peut observer que

$$(3)\qquad V = \int (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-x)^{-n-1}\,dz.$$

L'intégrale étant prise le long d'un contour infinitésimal décrit autour du point x est égale, à un facteur constant près, à $\varphi_n(x)$. On peut vérifier comme il suit que V satisfait à l'équation (2). On a

$$d(z-a)^{n+r+1}(z-b)^{n+s+1}(z-x)^{-n-2} \\ = \omega[(n+r+1)(z-b)(z-x) \\ +(n+s+1)(z-a)(z-x)-(n+2)(z-a)(z-b)],$$

ω désignant, pour abréger, la quantité

$$(z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-x)^{-n-3}\,dz.$$

Si l'on intègre alors autour du point x et si l'on multiplie par $-(n+1)$, on trouve

$$\begin{aligned}0 = \int (n+1)\,\omega\,[&-(n+r+1)(z-b)(z-x)\\&-(n+s+1)(z-a)(z-x)+(n+2)(z-a)(z-b)],\end{aligned}$$

et, en mettant la variable $z-x$ en évidence au lieu de z,

$$\begin{aligned}0 = \int (n+1)\,\omega\,\{&(n+2)(x-a)(x-b)\\&+(z-x)[(z-r-s)x+b(r-1)+a(s-1)]\\&-(n+r+s)(z-x)^2\};\end{aligned}$$

or de (3) on tire

$$V = \int \omega (z-x)^2, \quad \frac{dV}{dx} = (n+1)\int \omega (z-x),$$
$$\frac{d^2V}{dx^2} = (n+1)(n+2)\int \omega,$$

et, en vertu de ces formules, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dx^2}(x-a)(x-b)+\frac{dV}{dx}[(2-r-s)x+b(r-1)+a(s-1)]&\\-(n+1)(n+r+s)V = 0.&\end{aligned}$$

L'équation (2) est donc satisfaite en faisant $\varphi_n = V$. Mais cette vérification, si l'on y regarde de près, s'est faite sans qu'il ait été nécessaire de supposer n entier, et en supposant l'intégrale prise le long de l'axe des x, entre les limites a et b; d'où cette conclusion importante : l'équation (2), quels que soient n, r, s, se vérifie en posant

$$\varphi_n = \int_a^b (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-x)^{-n-1}\,dz;$$

on pourra donc, dans tous les cas, l'intégrer complétement, et une de ses intégrales sera algébrique, si n est entier.

Maintenant posons

$$a + b = -p, \quad ab = q, \quad 2 - s - r = g,$$
$$b(r-1) + a(s-1) = h, \quad -(n+1)(n+r+s) = k;$$

d'où l'on tire

$$a = +\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad b = +\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$
$$r = \frac{h + b - a(1-g)}{b-a}, \qquad s = \frac{h + a - b(1-g)}{a-b},$$
$$n = \frac{g - 3 \pm \sqrt{(g-1)^2 - 4k}}{2}.$$

L'équation (2) prendra la forme très-générale

$$(3) \qquad (x^2 + px + q)\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (gx + h)\frac{d\varphi}{dx} + k\varphi = 0,$$

que l'on saura, par conséquent, intégrer. Il y a plus, comme on trouve deux valeurs de n pour une même valeur de k, on pourra, par ce procédé, trouver tout de suite les deux intégrales de l'équation (3).

Nous ferons encore une remarque : il n'était pas nécessaire de vérifier que l'intégrale V satisferait à l'équation (2); en effet, l'opération à l'aide de laquelle on prend une dérivée pouvant se ramener à une intégration, il était facile de prévoir que toute intégration faite entre des limites faisant disparaître les termes intégrés par parties pourrait, dans le résultat final, être substituée à une différentiation. Cette remarque nous permettra de généraliser, un peu plus loin, la théorie que nous venons d'exposer, en évitant des calculs qui, sans cela, deviendraient d'un longueur rebutante.

Lorsque l'on suppose $r = s = \frac{1}{2}$, $a = -1$, $b = 1$, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x^2 - 1) + \frac{d\varphi_n}{dx}x - (n+1)^2\varphi_n = 0.$$

Cette équation peut s'intégrer par les moyens ordinaires; son intégrale est

$$\text{A} \cos(n+1)\arccos x + \text{B} \sin(n+1)\arccos x,$$

A et B désignant deux constantes; on en conclut facilement que, à un facteur constant près,

$$\sin(n+1)\arccos x = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}},$$

formule connue.

7. Proposons-nous, maintenant, de satisfaire aux équations

$$(1)\quad \int_a^b \varphi(x)dx = g_0, \quad \int_a^b \varphi(x)x\,dx = g_1, \quad \ldots, \quad \int_a^b \varphi(x)x^n dx = g_n,$$

$g_0, g_1, \ldots, g_n$ désignant des constantes données. Désignons par $\varphi^{-n}(x)$ la $n^{ième}$ intégrale de $\varphi(x)$, s'annulant pour $x=a$, on aura

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \varphi^{-1}(b) = g_0,$$

$$\int_a^b \varphi(x)x\,dx = \varphi^{-1}(b)b - \varphi^{-2}(b).1 = g_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_a^b \varphi(x)x^n dx = \varphi^{-1}(b)b^n - \varphi^{-2}(b)nb^{n-1}$$
$$+\varphi^{-3}(b)n(n-1)b^{n-2}\ldots \pm \varphi^{-n-1}\,1.2.3\ldots n = g_n.$$

Ces équations, respectivement multipliées par

$$b^n, \quad -\frac{n}{1}b^{n-1}, \quad \frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2}, \quad \ldots, \quad \ldots \pm 1$$

et ajoutées, en observant que

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \pm 1 = (1-1)^n = 0,$$

$$\frac{n}{1}.1 - \frac{n(n-1)}{1.2}.2 + \ldots \mp n = n(1-1)^{n-1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

donnent

$$1.2.3\ldots n\varphi^{-(n+1)}(b) = g_0 b^n - \frac{n}{1}g_1 b^{n-1} + \ldots \mp g_n.$$

Nous désignerons par $F_n(b)$ le polynôme écrit dans le second membre,

et qui, symboliquement, est égal à $(b-g)^n$; nous aurons alors

$$(2)\qquad \varphi^{-(n+1)}(b)=\frac{F_n(b)}{1.2.3\ldots n}.$$

Cela posé, la fonction $\varphi^{-(n+1)}(x)$ jouit des propriétés suivantes : 1° elle se réduit, ainsi que ses n premières dérivées pour $x=b$, respectivement aux $n+1$ quantités

$$\frac{F_n(b)}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{F_{n-1}(b)}{1.2.3\ldots(n-1)},\quad \ldots,\quad \frac{F_1(b)}{1},\quad F_0(b)=g_0.$$

2° elle s'annule, ainsi que ses n premières dérivées, pour $x=a$. La première propriété nous permet de la mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi^{-(n+1)}(x)=\frac{F_n(b)}{1.2.3\ldots n}&+\frac{(x-b)}{1}\frac{F_{n-1}(b)}{1.2.3\ldots(n-1)}\\&+\frac{(x-b)^2}{1.2}\frac{F_{n-2}(b)}{1.2\ldots(n-2)}+\ldots\\&+\frac{(x-b)^n}{1.2.3\ldots n}g_0+(x-b)^{n+1}\theta(x),\end{aligned}$$

$\theta(x)$ désignant une fonction que l'on peut supposer finie pour $x=b$. On peut observer que $\frac{F_{n-1}(x)}{1.2.3\ldots(n-1)}$, $\frac{F_{n-2}(x)}{1.2.3\ldots(n-2)}\ldots$ sont les dérivées successives de $\frac{F_n(x)}{1.2.3\ldots n}$, ainsi qu'il est facile de le constater par un calcul direct; il en résulte que la formule précédente peut aussi s'écrire

$$(3)\qquad \varphi^{-(n+1)}(x)=\frac{F_n(x)}{1.2.3\ldots n}+(x-b)^{n+1}\theta(x).$$

Mais, d'après la seconde propriété de la fonction, si l'on divise par $(x-b)^{n+1}$ et si l'on différentie n fois le résultat, on aura $n+1$ relations qui devront avoir lieu pour $x=a$, en supposant $\varphi^{-1}(a)=0$, $\varphi^{-2}(a)=0$, ..., $\varphi^{-(n+1)}(a)=0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\theta(a)&=-\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)},\\\theta'(a)&=-\frac{d}{da}\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

on en conclut le développement de $\theta(x)$

$$\theta(x) = -\frac{F_n(a)}{1.2\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} - \frac{x-a}{1}\frac{d}{da}\frac{F_n(a)}{1.2\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} - \ldots.$$

La formule (3) devient ainsi

$$\varphi^{-(n+1)}(x) = \frac{F_n(x)}{1.2.3\ldots n} - (x-b)^{n+1}\left[\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} + \ldots\right];$$

enfin, en différentiant $n+1$ fois

$$\varphi(x) = -\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left\{(x-b)^{n+1}\left[\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} + \ldots\right]\right\},$$

la solution cherchée $\varphi(x)$ se compose de deux parties dont l'une est un polynôme de degré n et dont l'autre est de la forme

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\psi(x),$$

et n'est autre qu'une *arbitraire d'intégration;* en faisant abstraction de cette arbitraire, on a

$$(3\ bis) \qquad \varphi(x) = -\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-b)^{n+1}\Theta(x)\right]\frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

et

$$\Theta(x) = \frac{F_n(a)}{(a-b)^{n+1}} + (x-a)\frac{d}{da}\left[\frac{F_n(a)}{(a-b)^{n+1}}\right] + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{F_n(a)}{(a-b)^{n+1}}\right].$$

On peut mettre la fonction Θ sous une forme un peu différente; en effet, en prenant les résidus relativement au point a, on a

$$\Theta(x) = \mathcal{E}\frac{F_n(z)}{(z-b)^{n+1}}\left[\frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right]$$

ou bien

$$\Theta(x) = \mathcal{E}\frac{F_n(z)}{(z-b)^{n+1}}\frac{(z-a)^{n+1}-(x-a)^{n+1}}{(z-x)(z-a)^{n+1}}.$$

Cette formule peut encore s'écrire

$$\Theta(x) = -\mathcal{E}\frac{F_n(z)(x-a)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-b)^{n+1}(z-x)};$$

par suite la formule (3 *bis*) donne

$$(4)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\mathcal{E}\frac{F_n(z)(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-b)^{n+1}(z-x)}.$$

Dans cette formule le résidu est relatif au point a, mais on peut le prendre par rapport au point b en changeant le signe; en effet, le résidu total est nul, car le dénominateur de la quantité placée sous le signe $\mathcal{E}$ est de degré supérieur de plus de deux unités à celui du numérateur. On a donc

$$\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b + \mathcal{E}_x = 0,$$

en représentant par $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_b$, $\mathcal{E}_x$, pour abréger, les résidus relatifs aux points a, b, x. Or $\mathcal{E}_x$ est égal à $F_n(x)$; cette fonction, différentiée n fois, donnera un résultat nul, et l'on a

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b) = 0;$$

il sera donc permis de transporter la double parenthèse dans (12) autour de $(z-b)^{n+1}$, à la condition de changer le signe du second membre. Cette formule (4) se transforme donc comme il suit :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{(1.2\ldots n)^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\frac{d^n}{da^n}\frac{F(a)}{(a-b)^{n+1}(a-x)}\right]\\ &= \frac{-1}{(1.2\ldots n)^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\frac{d^n}{db^n}\frac{F(b)}{(b-a)^{n+1}(b-x)}\right].\end{aligned}$$

8. On peut donner un peu plus de généralité aux résultats qui précèdent et en déduire quelques conséquences intéressantes. Je suppose que l'on désire une fonction $\varphi_n(x)$ satisfaisant aux formules

$$\int\varphi_n(x)\,dx = 0,\quad \int x\varphi_n(x)\,dx = 0,\quad \ldots,\quad \int x^{n-1}\varphi_n(x)\,dx = 0,$$

quand on prend pour limites des intégrales, non-seulement a et b, mais encore b et c, etc. Il est clair que la solution de cette question sera donnée par la formule

$$\varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n(x-c)^n \dots \psi(x),$$

la fonction $\psi(x)$ étant choisie de manière à ne pas devenir infinie pour $x = a, b, c, \dots$. Bornons-nous à considérer la fonction

$$\varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}(x-c)^{n+t}.$$

Il est facile de voir qu'elle satisfait à une équation très-générale du troisième ordre et linéaire, que l'on saura par suite intégrer complétement. Si l'on pose

$$u = (x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}(x-c)^{n+t},$$

on aura

$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{n+r}{x+a} + \frac{n+s}{x-b} + \frac{n+t}{x-c}\right)$$

ou bien

$$\frac{du}{dx}(x-a)(x-b)(x-c) = u(n+r)(x-b)(x-c) + \dots.$$

Si l'on différentie $n+2$ fois cette formule, on trouve

$$(x-a)(x-b)(x-c)\frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}} + \mathrm{P}\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} + \mathrm{Q}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \mathrm{R}\frac{d^n u}{dx^n} = 0,$$

ou bien

$$(x-a)(x-b)(x-c)\frac{d^3\varphi_n}{dx^3} + \mathrm{P}\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \mathrm{Q}\frac{d\varphi_n}{dx} + \mathrm{R}\varphi_n = 0,$$

formule où P, Q, R sont des polynômes en x des degrés 2, 1, 0. Ces polynômes ne seront pas les plus généraux de leurs degrés, mais ils dépendront des paramètres n, r, s, t. Quant à l'équation à laquelle on

parvient, elle admet les solutions

$$\int_a^b (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-c)^{n+t}(z-x)^{-n-1}\,dz,$$

$$\int_b^c (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-c)^{n+t}(z-x)^{-n-1}\,dz,$$

lors même que n n'est pas entier, et l'on peut par suite l'intégrer complétement.

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Soit une surface de second ordre $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ et un point M de cette surface dont les coordonnées soient ξ, η, ζ. On a la relation

$$(1) \qquad \frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} = 1,$$

et les coordonnées d'un point quelconque de la normale menée au point M sont données par les formules

$$x = \xi\left(1 + \frac{\lambda}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 + \frac{\lambda}{b}\right), \quad z = \zeta\left(1 + \frac{\lambda}{c}\right),$$

où λ détermine un paramètre variable. Je supposerai λ déterminé de telle sorte que le point considéré soit un des centres de courbure principaux de la surface au point M.

En désignant, pour un instant, par x_0, y_0 et z_0 les coordonnées de ce point, les pieds des normales abaissées de ce point sur la surface sont, comme on le sait, déterminés par les équations

$$\frac{x_0 - x}{\frac{x}{a}} = \frac{y_0 - y}{\frac{y}{a}} = \frac{z_0 - z}{\frac{z}{a}} = \rho,$$

où ρ désigne une racine quelconque de l'équation

$$\frac{ax_0^2}{(a+\rho)^2}+\frac{by_0^2}{(b+\rho)^2}+\frac{cz_0^2}{(c+\rho)^2}=1,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{(a+\lambda)^2\xi^2}{a(a+\rho)^2}+\frac{(b+\lambda)^2\eta^2}{b(b+\rho)^2}+\frac{(c+\lambda)^2\zeta^2}{c(c+\rho)^2}=1.$$

Puisque, par hypothèse, le point (x_0, y_0, z_0) est un des centres de courbure principaux de la surface au point M, l'équation précédente en ρ doit avoir une racine double égale à λ; cette équation est, en effet, en vertu de la relation (1), identiquement satisfaite quand on y fait $\rho=\lambda$; mais, de plus, la dérivée doit encore s'annuler pour cette valeur; d'où l'équation suivante :

$$(2)\qquad \frac{\xi^2}{a(a+\lambda)}+\frac{\eta^2}{b(b+\lambda)}+\frac{\zeta^2}{c(c+\lambda)}=0,$$

qui donne les valeurs de λ, déterminant les deux centres de courbure principaux au point M.

2. Les pieds des normales abaissées du point (x_0, y_0, z_0) sur la surface se trouvent sur la cubique gauche déterminée par les équations

$$xy\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{yx_0}{b}-\frac{xy_0}{a}=0,\quad yz\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{zy_0}{c}-\frac{yz_0}{b}=0,$$
$$zx\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+\frac{xz_0}{a}-\frac{zx_0}{c}=0;$$

multiplions la première de ces équations par z_0, la deuxième par x_0 et la troisième par y_0, il viendra

$$xyz_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+yzx_0\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+zxy_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0,$$

équation du cône ayant pour sommet le centre de la surface et contenant les pieds des normales.

Il est clair que le plan tangent à ce cône au point (ξ, η, ζ) est le plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice, au point M, qui correspond au centre de courbure considéré.

L'équation de ce plan tangent est

$$\sum x\left[\eta z_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\zeta y_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\right]=0,$$

ou, en remplaçant x_0, y_0 et z_0 par leurs valeurs et faisant quelques réductions faciles,

$$(3)\quad (a+\lambda)(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda)(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda)(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

3. Soient λ' et λ'' les deux racines de l'équation (2), elles correspondent aux deux axes de l'indicatrice et aux deux centres de courbure principaux corrélatifs.

De ce que je viens de dire il résulte que le plan passant par le centre de la surface et l'un des axes de l'indicatrice a pour équation

$$(4)\quad (a+\lambda')(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda')(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda')(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

Considérons le centre de courbure principal N correspondant à l'autre axe de l'indicatrice; les coordonnées sont données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right),\quad y=\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right),\quad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right).$$

Soient A, B, C les points où la normale MN rencontre respectivement les plans principaux de la surface Oyz, Ozx et Oxy.

Les coordonnées du point C sont

$$x=\xi\left(1-\frac{c}{a}\right),\quad y=\eta\left(1-\frac{c}{b}\right),\quad z=0.$$

Par ce point, menons un plan perpendiculaire à la normale et prenons son intersection avec la droite, menée par le point N, parallèle-

ment à l'axe des z. En désignant par C' ce point, un calcul facile montre que ses coordonnées ont pour valeurs

$$x = \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right), \quad z = \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right) - \frac{c(c + \lambda'')}{\zeta}\,\mathrm{P},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}.$$

Menons de même, par le point B, un plan perpendiculaire à MN et désignons par B' le point où ce plan rencontre la droite menée par N parallèlement à l'axe des y; ses coordonnées seront données par les formules

$$x = \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right) - \frac{b(b + \lambda'')}{\eta}\,\mathrm{P}, \quad z = \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right).$$

Désignons enfin par A' le point où la droite menée par le point N, parallèlement à l'axe des x, rencontre le plan mené par A perpendiculairement à MN.

Le plan, passant par le centre O de la surface et les points B' et C', a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right) & \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right) - \frac{c(c + \lambda'')}{\zeta}\,\mathrm{P} \\ \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right) - \frac{b(b + \lambda'')}{\eta}\,\mathrm{P} & \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(5) \qquad \frac{\xi x}{a(a + \lambda'')} + \frac{\eta y}{b(b + \lambda'')} + \frac{\zeta z}{c(c + \lambda'')} = 0.$$

Cette équation étant symétrique par rapport aux lettres x, y et z, on en conclut que le plan OB'C' passe par le point A'. Ainsi, les trois

points A′, B′ et C′ sont situés dans un même plan passant par le centre de la surface.

Je dis maintenant que ce plan passe par l'axe de l'indicatrice, au point M, qui correspond au centre de courbure principal distinct de N.

L'équation (2) donne en effet l'identité suivante :

$$\frac{\xi^2}{a}(b+\lambda)(c+\lambda)+\frac{\eta^2}{b}(c+\lambda)(a+\lambda)+\frac{\zeta^2}{c}(a+\lambda)(b+\lambda)=(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda''),$$

d'où, en faisant $\lambda = -a$,

$$a(a+\lambda'')=-\frac{\xi^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+\lambda')(b-c)},$$

et de même

$$b(b+\lambda'')=-\frac{\eta^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b+\lambda')(c-a)},$$

$$c(c+\lambda'')=-\frac{\zeta^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(c+\lambda')(a-b)}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (5), il viendra

$$\frac{x(a+\lambda')(b-c)}{\xi}+\frac{y(b+\lambda')(c-a)}{\eta}+\frac{z(c+\lambda')(a-b)}{\zeta}=0;$$

c'est précisément, comme on le voit par la relation (4), l'équation du plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice conjugué au centre principal de courbure distinct de N. La proposition est donc démontrée.

4. De là résulte immédiatement le théorème suivant :

Théorème I. — *Soient un point* M *situé sur une surface du second ordre,* MT *et* MT′ *les tangentes aux deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Par la droite* MT′ *et le centre de la surface menons un plan* P; *puis, au point où la normale élevée au point* M *rencontre un des plans de symétrie de la surface, un plan perpendiculaire à cette normale. Ce plan coupe le plan* P *suivant une droite; par cette droite, menons un plan perpendiculaire au plan de symétrie considéré. Ce dernier*

plan rencontre la normale au centre de courbure de la section normale de la surface qui est tangente à la droite MT [*].

5. La normale, menée à la surface par le point M, rencontre les trois points de symétrie de cette surface aux points A, B et C.

Menons par ces points des droites respectivement perpendiculaires à ces plans de symétrie. Ces droites, qui ont pour équation

$$x = \xi\left(1 - \frac{c}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 - \frac{c}{b}\right),$$
$$y = \eta\left(1 - \frac{a}{b}\right), \quad z = \zeta\left(1 - \frac{a}{c}\right),$$
$$z = \zeta\left(1 - \frac{b}{c}\right), \quad x = \xi\left(1 - \frac{b}{a}\right),$$

sont trois génératrices d'un hyperboloïde H; je dirai que ces génératrices sont du système (G). Cet hyperboloïde admet un autre système de génération (G'); trois des génératrices de ce système sont, en particulier, déterminées par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \xi\left(1 - \frac{b}{a}\right), & y = \eta\left(1 - \frac{a}{b}\right), \\ y = \eta\left(1 - \frac{c}{b}\right), & z = \zeta\left(1 - \frac{b}{c}\right), \\ z = \zeta\left(1 - \frac{a}{c}\right), & x = \xi\left(1 - \frac{c}{a}\right). \end{cases}$$

Considérons le centre de courbure N de la surface, situé sur la normale au point N et correspondant à l'axe de l'indicatrice MT.

La génératrice de l'hyperboloïde H, passant par N et appartenant au système (G), se détermine facilement par la condition qu'elle rencontre les droites définies par les équations (6); on trouve ainsi que

---

[*] Ce théorème est l'extension aux surfaces du second ordre d'une élégante proposition due à M. Mannheim :

Si, au point où la normale, élevée en un point M *d'une conique, rencontre un axe de cette conique, on mène une droite perpendiculaire à cette normale, la droite, passant par le point de rencontre de cette perpendiculaire avec le diamètre qui aboutit au point* M, *et menée perpendiculairement à l'axe considéré, rencontre la normale au centre du cercle osculateur en* M.

ses équations sont

$$\frac{x-\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right)}{\frac{\xi}{a(a+\lambda'')}}=\frac{y-\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right)}{\frac{\eta}{b(b+\lambda'')}}=\frac{z-\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right)}{\frac{\zeta}{c(c+\lambda'')}}.$$

En les comparant à l'équation (5), on en conclut immédiatement que cette génératrice est perpendiculaire au plan OMT'.

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *La normale, menée en un point* M *d'une surface du second ordre, rencontre les plans principaux de cette surface en trois points. Menons respectivement par ces points trois droites* (D) *perpendiculaires aux plans principaux; elles déterminent un hyperboloïde.*

Cela posé, on peut construire deux génératrices de cet hyperboloïde, appartenant au même système que les droites (D) *et perpendiculaires au diamètre passant par le point* M. *Ces génératrices rencontrent la normale aux deux centres de courbure principaux de la surface relatifs au point* M *et les plans, menés par le diamètre, perpendiculairement à ces deux génératrices, coupent le plan tangent en* M, *suivant les axes de l'indicatrice.*

Il est à remarquer qu'en désignant par MT et MT' les tangentes à l'indicatrice, et par N, N' les centres de courbure des sections normales correspondantes, le plan mené par OM perpendiculairement à la génératrice de l'hyperboloïde passant par le point N coupe le plan tangent suivant la droite MT'.

II.

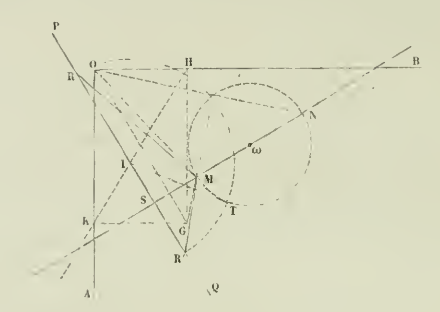
6. Les trois axes d'une surface du second ordre étant donnés de position, cette surface est déterminée si l'on se donne un de ses points m et la normale en ce point. Ces données sont donc suffisantes pour obtenir en ce point les directions des axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux.

A cet effet, on peut, pour déterminer les axes de l'indicatrice, employer la construction suivante :

Soient OA *et* OB *deux des axes de la surface du second ordre,* M *la*

projection du point m sur le plan de ces axes, N *et* PQ *les traces sur ce même plan de la normale et du plan tangent au point* M; PQ *est, comme on le sait, perpendiculaire à* MN.

Construisons le point de rencontre G *des hauteurs du triangle* OMN ; *puis, de ce point, abaissons des perpendiculaires* GH *et* GK *sur les axes* OA *et* OB. *La droite* KH, *qui joint leurs pieds, rencontre* PQ *au*



point I. *Menons du point* I, *au cercle décrit sur* MN *comme diamètre, une droite touchant ce cercle au point* T, *et, du point* I *comme centre, décrivons un cercle ayant* IT *pour rayon : ce cercle rencontre* PQ *en deux points* R *et* R'.

Les droites MR *et* MR' *sont les projections sur le plan* OAB *des axes de l'indicatrice au point* M.

Démonstration. — Soient mL un des axes de l'indicatrice au point m et F le centre de courbure de la section normale correspondante. Deux des normales, que l'on peut mener du point F à la surface, ont leurs pieds en m et un point m' situé à une distance infiniment petite, sur l'axe mL; on sait d'ailleurs que les pieds des normales, le point F et les quatre sommets du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan de l'infini, sont situés sur une même cubique gauche. Il en résulte que, si l'on joint le point m au point m', au point F et aux quatre sommets du tétraèdre, on a six droites situées sur un même cône du second ordre.

En d'autres termes, les droites menées par le point m parallèlement

aux axes de la surface, la normale en ce point, le diamètre passant par ce point et l'axe de l'indicatrice mT, sont sur un même cône du second ordre. On voit que ce cône est circonscrit à un trièdre trirectangle; par suite, et en vertu d'une proposition bien connue, le deuxième axe mT' de l'indicatrice au point m, étant perpendiculaire aux deux génératrices mT et mF du cône, est également situé sur ce cône.

Considérons les traces de ces six droites sur le plan OAB; elles sont situées sur une même conique; d'où cette conclusion :

Les traces des axes de l'indicatrice sur le plan OAB sont données par l'intersection de la droite PQ avec l'hyperbole équilatère passant par les points O, M, N, et ayant ses asymptotes parallèles aux droites OA et OB.

Pour construire ces points d'intersection, je remarque que le point G, où se rencontrent les hauteurs du triangle OMN, est situé sur cette hyperbole. Si donc du point Gm on abaisse des perpendiculaires sur les axes OA et OB, la droite HK, qui joint leurs pieds, est le diamètre de l'hyperbole conjuguée à la direction PQ. En effet, cette droite fait avec les axes des angles égaux à ceux que fait avec ces axes la droite PQ, et, de plus, elle passe par le point milieu de la corde OG de l'hyperbole, corde parallèle à PQ. Le point I, où KH rencontre PQ, est donc le point milieu des deux points R et R', où les axes de l'indicatrice rencontrent la trace du plan tangent.

Pour achever de déterminer ces points, je remarque que l'angle RmR' est droit. Considérons la perpendiculaire abaissée du point m sur PQ; le pied de cette perpendiculaire est le point S, où PQ rencontre MN. On a

$$\overline{SR}\,.\,\overline{SR'} = \overline{mS}^2 = \overline{SM}\,.\,\overline{SN}\,;$$

ou bien encore, si l'on désigne par ω le centre du cercle, décrit sur MN comme diamètre, et par ρ le rayon de ce cercle,

$$\overline{IR}^2 - \overline{IS}^2 = \overline{S\omega}^2 - \rho^2\,;$$

d'où l'on conclut que les cercles, décrits respectivement sur RR' et MN comme diamètres, se coupent à angle droit; et de là résulte immédiatement la construction que j'ai donnée ci-dessus.

7. Pour déterminer maintenant les projections sur le plan AOB des

centres de courbure principaux de la surface au point m, il suffit d'inscrire une parabole dans chacun des quadrilatères formés respectivement par les droites OA, OB, MN, MR et OA, OB, MN, MR'. Les points de contact de ces paraboles avec la droite MN sont les projections cherchées des centres de courbure principaux, et ils se déterminent, comme on le sait, très-facilement au moyen de simples lignes droites.

Cette construction est justifiée par le théorème suivant :

Si, sur le plan de deux des axes de symétrie OA *et* OB *d'une surface de second ordre, on projette la normale en un point m de cette surface et l'un des axes de l'indicatrice en ce point, la parabole, tangente aux projections de ces deux droites et aux axes* OA *et* OB, *touche la projection de la normale en un point qui est la projection du centre de courbure de la section normale passant par l'axe de l'indicatrice considéré.*

Démonstration. — Soit mL l'axe de l'indicatrice considéré et F le centre de courbure principal correspondant. Comme je l'ai déjà rappelé, deux des normales que l'on peut abaisser du point F sur la surface ont leurs pieds au point m et au point m', situé à une distance infiniment petite sur ML.

Soit p le pied d'une autre normale quelconque passant par le point F; on sait que les sommets du tétraèdre F$mm'p$ et du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan à l'infini sont situés sur une même cubique gauche.

Par suite, en vertu d'un théorème connu, les faces de ces tétraèdres sont osculatrices d'une autre cubique gauche, et le plan normal principal Fmm' est coupé par les sept autres faces suivant cinq droites tangentes à une même conique.

En d'autres termes, le plan normal principal passant par mL coupe les trois plans principaux de la surface suivant trois droites. Ces trois droites et la normale au point m sont tangentes à une parabole touchant la normale au point F; par suite, les projections des trois droites et de la normale sont tangentes à une parabole touchant la projection de la normale, au point qui est la projection de F; d'où la proposition énoncée ci-dessus.

Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques;

PAR M. VILLIE,

Ingénieur des Mines,
Professeur à l'Université catholique de Lille.

1. Considérons un corps solide en mouvement, et supposons qu'une masse fluide, accompagnant ce corps solide, conserve une position fixe et une distribution invariable des masses de ses divers points, relativement à ce corps solide; nous supposerons que cet équilibre relatif a lieu dans le cas le plus général que nous présente la nature, c'est-à-dire sous l'influence des actions du corps solide, de la masse fluide sur les points de son intérieur, et de corps extérieurs quelconques, soumis à la seule condition de déterminer le mouvement propre de la masse fluide considérée, de façon à assurer l'équilibre de cette masse liquide ou gazeuse.

S'il s'agit, par exemple, du globe terrestre, les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés reviendraient à supposer qu'il n'y a ni vents, ni marées. Les conséquences que nous tirerons de l'étude du problème actuel devront donc s'appliquer à peu près à notre planète, sans quoi il y aurait des déplacements, non plus simplement faibles et périodiques, mais très-importants de la masse fluide qui l'entoure.

2. Rapportons le système en mouvement à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace OX, OY, OZ, et considérons trois autres axes également rectangulaires ox, oy, oz fixes, par rapport au corps en mouvement que nous considérons; soient G l'accélération, et ξ, η, ζ les

coordonnées de O, point qui sera, par exemple, le centre de gravité de l'ensemble du corps et de la masse fluide qui l'accompagne.

Chaque élément fluide dont il s'agit est en équilibre sous l'action des forces suivantes :

1° La pression P de la masse fluide, au point (X, Y, Z), pression qui, de même que la densité ρ, au même point, est supposée ne dépendre que des trois variables x, y, z, lesquelles sont indépendantes du temps t;

2° L'attraction du corps solide qu'entoure la masse fluide;

3° L'attraction de cette dernière masse sur le point que l'on considère à son intérieur;

4° L'attraction des corps extérieurs en mouvement;

5° La force d'inertie résultant du mouvement du point dont il s'agit.

3. Appelons

f le coefficient de l'attraction universelle;

V le potentiel de l'action du corps considéré sur les points extérieurs;

V′ le potentiel de l'action de la masse fluide sur les points de son intérieur;

V_1, V_2, ..., V_n les potentiels des actions des corps extérieurs A_1, A_2, ..., A_n.

Pour l'équilibre, il faut et il suffit que l'on ait en chaque point

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dX} = f\left(\dfrac{dV}{dX} + \dfrac{dV'}{dX} + \sum \dfrac{dV_n}{dX}\right) - \dfrac{d^2X}{dt^2}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dY} = f\left(\dfrac{dV}{dY} + \dfrac{dV'}{dY} + \sum \dfrac{dV_n}{dY}\right) - \dfrac{d^2Y}{dt^2}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dZ} = f\left(\dfrac{dV}{dZ} + \dfrac{dV'}{dZ} + \sum \dfrac{dV_n}{dZ}\right) - \dfrac{d^2Z}{dt^2}. \end{cases}$$

On a, d'ailleurs, entre les coordonnées d'un même point dans les deux systèmes, les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \xi + ax + by + cz, \\ Y = \eta + a'x + b'y + c'z, \\ Z = \zeta + a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

qui donnent, à l'aide de deux différentiations successives et en tenant compte de la constance des coordonnées x, y et z,

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2}+x\frac{d^2a}{dt^2}+y\frac{d^2b}{dt^2}+z\frac{d^2c}{dt^2},$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2}=\frac{d^2\eta}{dt^2}+x\frac{d^2a'}{dt^2}+y\frac{d^2b'}{dt^2}+z\frac{d^2c'}{dt^2},$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2}=\frac{d^2\zeta}{dt^2}+x\frac{d^2a''}{dt^2}+y\frac{d^2b''}{dt^2}+z\frac{d^2c''}{dt^2}.$$

Les équations de l'équilibre peuvent donc s'écrire

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dX}=f\left(\dfrac{dV}{dX}+\dfrac{dV'}{dX}+\sum\dfrac{dV_n}{dX}\right)-\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+x\dfrac{d^2a}{dt^2}+y\dfrac{d^2b}{dt^2}+z\dfrac{d^2c}{dt^2}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dY}=f\left(\dfrac{dV}{dY}+\dfrac{dV'}{dY}+\sum\dfrac{dV_n}{dY}\right)-\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+x\dfrac{d^2a'}{dt^2}+y\dfrac{d^2b'}{dt^2}+z\dfrac{d^2c'}{dt^2}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dZ}=f\left(\dfrac{dV}{dZ}+\dfrac{dV'}{dZ}+\sum\dfrac{dV_n}{dZ}\right)-\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}+x\dfrac{d^2a''}{dt^2}+y\dfrac{d^2b''}{dt^2}+z\dfrac{d^2c''}{dt^2}\right).\end{cases}$$

Les quantités ρ et P sont fonctions de t et des coordonnées X, Y, Z, qui dépendent elles-mêmes, en vertu des formules (2), de x, y, z et t; en les considérant comme des fonctions composées, dépendant seulement, en définitive, de x, y et z, et en différentiant P par rapport à chacune de ces dernières variables, il viendra

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{dX}\frac{dX}{dx}+\frac{dP}{dY}\frac{dY}{dx}+\frac{dP}{dZ}\frac{dZ}{dx},$$

ou

$$(4)\quad\begin{cases}\dfrac{dP}{dx}=a\dfrac{dP}{dX}+a'\dfrac{dP}{dY}+a''\dfrac{dP}{dZ},\\[2ex] \dfrac{dP}{dy}=b\dfrac{dP}{dX}+b'\dfrac{dP}{dY}+b''\dfrac{dP}{dZ},\\[2ex] \dfrac{dP}{dz}=c\dfrac{dP}{dX}+c'\dfrac{dP}{dY}+c''\dfrac{dP}{dZ}.\end{cases}$$

On aurait des formules analogues pour les dérivées de $V, V', V_1, V_2, \ldots, V_n$. Cela posé, si l'on ajoute les équations (3) respectivement multipliées, soit par a, a', a'', soit par b, b', b'', soit enfin par c, c', c'', on aura trois nouvelles équations évidemment équivalentes à (3), et qui seront, eu

égard aux équations (4) et aux relations

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2}+a'\frac{d^2\eta}{dt^2}+a''\frac{d^2\zeta}{dt^2}=G_x,$$

$$b\frac{d^2\xi}{dt^2}+b'\frac{d^2\eta}{dt^2}+b''\frac{d^2\zeta}{dt^2}=G_y,$$

$$c\frac{d^2\xi}{dt^2}+c'\frac{d^2\eta}{dt^2}+c''\frac{d^2\zeta}{dt^2}=G_z,$$

$$(5)\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}&=f\left(\frac{dV}{dx}+\frac{dV'}{dx}+\sum\frac{dV_n}{dx}\right)-G_x-x\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}\right)\\
&\quad-y\left(a\frac{d^2b}{dt^2}+a'\frac{d^2b'}{dt^2}+a''\frac{d^2b''}{dt^2}\right)-z\left(a\frac{d^2c}{dt^2}+a'\frac{d^2c'}{dt^2}+a''\frac{d^2c''}{dt^2}\right),\\
\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dy}&=f\left(\frac{dV}{dy}+\ldots\right)-G_y-x\left(b\frac{d^2a}{dt^2}+\ldots\right)\\
&\quad-y\left(b\frac{d^2b}{dt^2}+\ldots\right)-z\left(b\frac{d^2c}{dt^2}+\ldots\right),\\
\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz}&=f\left(\frac{dV}{dz}+\ldots\right)-G_z-x\left(c\frac{d^2a}{dt^2}+\ldots\right)\\
&\quad-y\left(c\frac{d^2b}{dt^2}+\ldots\right)-z\left(c\frac{d^2c}{dt^2}+\ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

Différentions les équations (5), respectivement par rapport à x, y et z, il vient

$$(6)\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{dP}{dx}\frac{d\rho}{dx}&=f\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V'}{dx^2}+\sum\frac{d^2V_n}{dx^2}\right)\\
&\quad-\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}\right),\\
\frac{1}{\rho}\frac{d^2P}{dy^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{dP}{dy}\frac{d\rho}{dy}&=f\left(\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V'}{dy^2}+\sum\frac{d^2V_n}{dy^2}\right)\\
&\quad-\left(b\frac{d^2b}{dt^2}+b'\frac{d^2b'}{dt^2}+b''\frac{d^2b''}{dt^2}\right),\\
\frac{1}{\rho}\frac{d^2P}{dz^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{dP}{dz}\frac{d\rho}{dz}&=f\left(\frac{d^2V}{dz^2}+\frac{d^2V'}{dz^2}+\sum\frac{d^2V_n}{dz^2}\right)\\
&\quad-\left(c\frac{d^2c}{dt^2}+c'\frac{d^2c'}{dt^2}+c''\frac{d^2c''}{dt^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Posons, pour abréger l'écriture, φ étant une fonction quelconque

de x, y et z,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\Delta_2\varphi,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=(\Delta_1\varphi)^2,$$

et ajoutons les équations (6), nous aurons, en tenant compte des relations bien connues, $\Delta_2 V=0$, $\Delta_2 V'=-4\pi\rho$, $\Delta_2 V_n=0$,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\Delta_2 P-\left(\frac{dP}{dx}\frac{d\rho}{dx}+\frac{dP}{dy}\frac{d\rho}{dy}+\frac{dP}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right)+4\pi f\rho^3\\ &+\rho^2\left\{\begin{aligned} &a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}\\ &+b\frac{d^2b}{dt^2}+b'\frac{d^2b'}{dt^2}+b''\frac{d^2b''}{dt^2}\\ &+c\frac{d^2c}{dt^2}+c'\frac{d^2c'}{dt^2}+c''\frac{d^2c''}{dt^2}\end{aligned}\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

Or la relation

$$a^2+a'^2+a''^2=1$$

donne

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{da''}{dt}\right)^2+a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}=0,$$

ce qui permet d'écrire comme suit le terme en ρ^2 de l'équation (7) :

$$-\rho^2\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{da''}{dt}\right)^2\\ &+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{db'}{dt}\right)^2+\left(\frac{db''}{dt}\right)^2\\ &+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dt}\right)^2\end{aligned}\right.$$

Or $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ sont les coordonnées, par rapport à des parallèles menées par o, des points situés sur les axes ox, oy et oz, à une distance de o égale à l'unité, et les dérivées de ces quantités sont les vitesses de ces trois points projetées sur oX, oY et oZ; il est donc permis pour les calculer d'introduire l'axe instantané du système xyz, pivotant autour de o. Soient donc ω_X, ω_Y, ω_Z les trois composantes de cette rotation ω dont la direction et la grandeur sont des fonctions

du temps t; on a

$$\frac{da}{dt} = c\omega_Y - b\omega_Z, \quad \frac{da'}{dt} = c'\omega_Y - b'\omega_Z, \quad \frac{da''}{dt} = c''\omega_Y - b''\omega_Z,$$

d'où

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da''}{dt}\right)^2 = \omega_Y^2 + \omega_Z^2.$$

L'équation (7) devient donc

$$(8) \qquad \rho\Delta_2 P - \left(\frac{dP}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dP}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right) + 4\pi f\rho^3 - 2\rho^2\omega^2 = 0.$$

Telle est l'équation générale qui lie, indépendamment du mouvement de chaque point, la pression à la densité dans une masse fluide en équilibre relatif, dans les conditions générales dans lesquelles nous nous sommes placés; elle est à l'abri de toute hypothèse sur la nature du fluide et indépendante de l'action des corps extérieurs à cette masse fluide. Cette équation nous montre que la vitesse angulaire du système autour de son axe instantané de rotation passant par le centre de gravité doit être constante; c'est en effet la seule quantité qui, dans l'équation (8), pourrait être fonction du temps. Il peut être nécessaire, pour la conservation de l'équilibre, que la direction de cet axe varie, mais la vitesse angulaire devra toujours avoir la même valeur. Ainsi, en admettant que l'on puisse disposer à son gré de toutes les conditions du problème, *l'équilibre ne pourra jamais avoir lieu si la vitesse angulaire du système autour de son axe instantané de rotation n'est pas constante,* et cette constante est indépendante des corps extérieurs et des positions nécessaires de l'axe instantané de rotation autour duquel le système tourne.

4. Examinons spécialement le cas encore très-général où la température est constante et le fluide de constitution homogène; on a alors

$$(9) \qquad \rho = \varphi(P),$$

et, si nous ajoutons les équations (5) nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, après les avoir multipliées respectivement par dx, dy et dz, le premier membre devient

$$\frac{1}{\varphi(P)}dP = d\psi(P),$$

c'est-à-dire la différentielle exacte d'une fonction de x, y et z, ce qui donne, puisque les termes fournis par la première parenthèse sont intégrables, les conditions nécessaires et suffisantes

$$a\frac{d^2 b}{dt^2} + a'\frac{d^2 b'}{dt^2} + a''\frac{d^2 b''}{dt^2} = b\frac{d^2 a}{dt^2} + b'\frac{d^2 a'}{dt^2} + b''\frac{d^2 a''}{dt^2},$$
$$b\frac{d^2 c}{dt^2} + b'\frac{d^2 c'}{dt^2} + b''\frac{d^2 c''}{dt^2} = c\frac{d^2 b}{dt} + c'\frac{d^2 b'}{dt^2} + c''\frac{d^2 b''}{dt^2},$$
$$c\frac{d^2 a}{dt^2} + c'\frac{d^2 a'}{dt^2} + c''\frac{d^2 a''}{dt^2} = a\frac{d^2 c}{dt^2} + a'\frac{d^2 c'}{dt^2} + a''\frac{d^2 c''}{dt^2}.$$

ou

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\left(a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt}\right) + \left(a'\frac{db'}{dt} - b'\frac{da'}{dt}\right) + \left(a''\frac{db''}{dt} - b''\frac{da''}{dt}\right)\right] = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left[\left(b\frac{dc}{dt} - c\frac{db}{dt}\right) + \left(b'\frac{dc'}{dt} - c'\frac{db'}{dt}\right) + \left(b''\frac{dc''}{dt} - c''\frac{db''}{dt}\right)\right] = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left[\left(c\frac{da}{dt} - a\frac{dc}{dt}\right) + \left(c'\frac{da'}{dt} - a'\frac{dc'}{dt}\right) + \left(c''\frac{da''}{dt} - a''\frac{dc''}{dt}\right)\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

$$a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt} = (a^2 + b^2)\omega_Z - ac\omega_X - bc\omega_Y,$$
$$a'\frac{db'}{dt} - b'\frac{da'}{dt} = (a'^2 + b'^2)\omega_Z - a'c'\omega_X - b'c'\omega_Y,$$
$$a''\frac{db''}{dt} - b''\frac{da''}{dt} = (a''^2 + b''^2)\omega_Z - a''c''\omega_X - b''c''\omega_Y;$$

les équations (10) reviennent donc à

$$\frac{d\omega_Z}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega_X}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega_Y}{dt} = 0$$

ou

$$(11)\qquad \omega_X = A, \quad \omega_Y = B, \quad \omega_Z = C,$$

A, B et C étant des constantes, c'est-à-dire que, dans ce cas, un peu moins général que celui que nous avons traité tout d'abord, l'équilibre exige, outre la constance de la vitesse angulaire, que la position de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes fixes ne change pas.

5. Voyons, en terminant, ce que devient, dans quelques cas plus particuliers, l'équation (8), qui peut servir à déterminer la pression en fonction de x, y et z.

Masse gazeuse. — On admet alors que la relation qui lie la pression à la densité est la suivante :

$$\rho = \frac{P}{K}, \tag{12}$$

K étant une constante, si, comme nous continuons à le supposer, la température ne varie pas; on a alors

$$K^2 P \Delta_2 P - K^2 (\Delta_1 P)^2 + 4\pi f P^3 - 2K\omega^2 P^2 = 0. \tag{13}$$

Masse liquide. — Si l'on suppose d'abord ce liquide incompressible, c'est-à-dire de densité constante, l'équation (8) devient

$$\Delta_2 P = 2\rho(\omega^2 - 2\pi f \rho). \tag{14}$$

C'est l'équation à laquelle satisferait le potentiel de l'action de la masse fluide considérée sur les points de son intérieur, si celle-ci avait pour densité constante

$$\rho_1 = f\rho^2 - \frac{\rho\omega^2}{2\pi};$$

enfin, si le liquide est compressible, on peut admettre, pour la relation qui lie la pression à la densité, la formule

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + KP_0}(1 + KP) = \frac{1 + KP}{\alpha}, \tag{15}$$

autrement dit, supposer la contraction proportionnelle à la pression; l'équation (8) devient alors

$$\alpha^2 (1 + KP)\Delta_2 P - \alpha K(\Delta_1 P)^2 + 4\pi f(1 + KP)^3 - 2\omega^2 \alpha (1 + KP)^2 = 0,$$

ou, en posant $1 + KP = KP_1$,

$$\alpha^2 P_1 \Delta_2 P_1 - \alpha^2 (\Delta P_1)^2 + 4\pi f K^2 P_1^3 - 2\omega^2 \alpha K P_1^2 = 0, \tag{16}$$

équation qui a beaucoup d'analogie avec l'équation (13), qui caractérise les corps gazeux.

Sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux cercles;

Par M. WEILL,

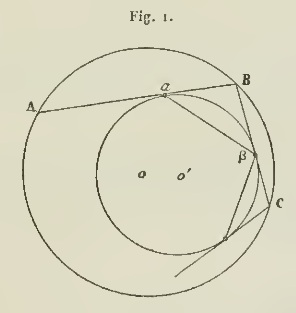
Ex-Lieutenant d'Artillerie, Professeur de Mathématiques.

PREMIÈRE PARTIE.

Problème. — *Trouver la relation entre les rayons de deux cercles et la distance de leurs centres, pour qu'un polygone puisse être inscrit à l'un et circonscrit à l'autre.*

Soit ABC (*fig.* 1) une portion de ligne polygonale inscrite et circonscrite aux cercles O et O', $\alpha\beta\gamma\ldots$ la ligne polygonale formée par les points de contact des côtés AB, BC, ... avec le cercle O'. Les milieux

Fig. 1.



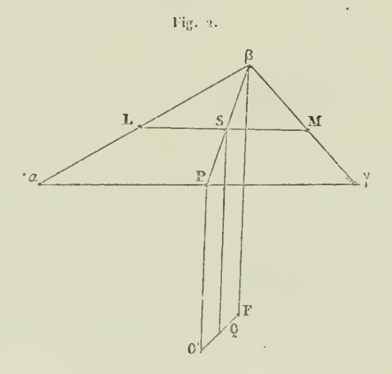
$\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ... décrivent une circonférence. Les côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ... touchent une conique Φ, dont l'un des foyers est en O'.

Nous allons étudier quelques propriétés de la ligne $\alpha\beta\gamma$ ..., qui vont nous amener à la solution du problème proposé.

Théorème I. — *La perpendiculaire abaissée d'un sommet β de la ligne $\alpha\beta\gamma$... sur la droite qui joint les deux sommets adjacents α, γ, passe par le deuxième foyer* F *de la conique* Φ.

En effet (*fig.* 2), les milieux L, M des côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ décrivant un cercle, la perpendiculaire SQ au milieu de LM passe par le centre Q de ce cercle, qui est le centre de la conique Φ.

Fig. 2.



Théorème II. — *Le centre des moyennes distances de trois sommets consécutifs de la ligne $\alpha\beta\gamma$... décrit une circonférence pendant le mouvement de cette ligne.*

Lemme. — Le point D, projection du sommet β sur la droite $\alpha\gamma$ qui joint les deux sommets adjacents, décrit une circonférence pendant le mouvement de la ligne $\alpha\beta\gamma$...

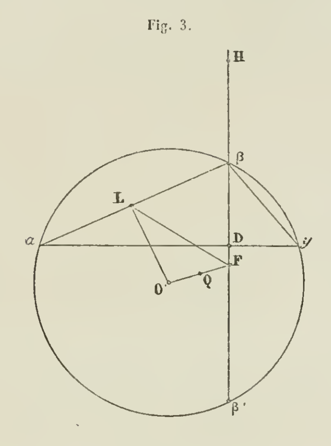
Posons $QL = \rho_2$, $O'Q = \delta_2$, $O'\alpha = \rho_1$. On a

$$\overline{FL}^2 + \overline{LO'}^2 = 2\rho_2^2 + 2\delta_2^2,$$
$$\overline{F\alpha}^2 + \overline{F\beta}^2 = 2\overline{FL}^2 + 2\overline{\alpha L}^2,$$
$$2\overline{O'L}^2 + 2\overline{\alpha L}^2 = 2\rho_1^2,$$

d'où l'on tire successivement

$$\overline{F\alpha}^2 + \overline{F\beta}^2 - \overline{\alpha\beta}^2 = 2\overline{FL}^2 - 2\overline{\alpha L}^2 = 4(\rho_2^2 + \delta_2^2 - \rho_1^2)$$
$$\overline{FD}^2 - \overline{D\beta}^2 + (FD + D\beta)^2 = 4(\rho_2^2 + \delta_2^2 - \rho_1^2)$$
$$FD.F\beta = 2(\rho_2^2 + \delta_2^2 - \rho_1^2) = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Fig. 3.



Démonstration. — Prenons $\beta H = 2O'P$, H sera le point de concours des hauteurs du triangle $\alpha\beta\gamma$. Le théorème énoncé sera démontré, si nous prouvons que H décrit une circonférence. On a

$$FD.\,F\beta = 2(\rho_2^2 + \delta_2^2 - \rho_1^2),$$
$$FH = F\beta + 2O'P,$$
$$F\beta.F\beta' = \rho_1^2 - 4\delta_2^2 = (F\beta + 2O'P - 2FD)F\beta;$$

d'où l'on tire

$$\frac{FD}{F\beta + 2O'P - 2FD} = \frac{FD}{FH - 2FD} = \frac{2(\rho_2^2 + \delta_2^2 - \rho_1^2)}{\rho_1^2 - 4\delta_2^2} = \text{const.}$$
$$\frac{FD}{FH} = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

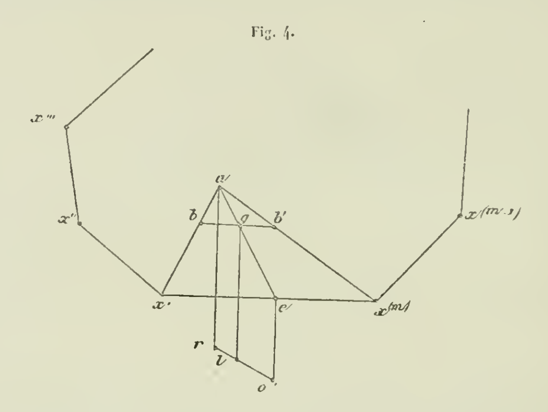
THÉORÈME III. — *Si l'on considère m sommets consécutifs*

$$(x', x'', \ldots, x^{(m)})$$

de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$, la perpendiculaire abaissée sur la droite $x'x^{(m)}$, du centre des moyennes distances des autres sommets, passe par un point qui reste fixe pendant le déplacement de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$.

Soit a le centre des moyennes distances des sommets $(x''x''' \ldots x^{(m-1)})$. Menons ax' $ax^{(m)}$, les points b et b' qui divisent ces droites en deux

Fig. 4.



parties proportionnelles à 1 et $(m-1)$ sont les centres des moyennes distances des points $(x'x'' \ldots x^{(m-1)})$, $(x''x''' \ldots x^{(m)})$.

Joignons le point a au milieu e de $x'x^{(m)}$. Cette droite passe par le milieu g de bb'.

Supposons démontré que les points bb' décrivent une circonférence pendant le mouvement de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$; la perpendiculaire gl au milieu g de bb' passera par le centre l de cette circonférence; la perpendiculaire ar à bb' rencontrera $O'l$ en un point r qui sera fixe, car le rapport $\frac{O'l}{lr} = \frac{x'b}{ba}$ est constant.

THÉORÈME IV (*théorème fondamental*). — *Le centre des moyennes*

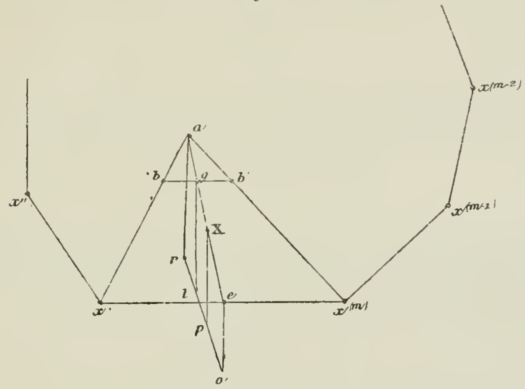
distances de m sommets consécutifs de la ligne αβγ... décrit une circonférence fixe pendant le déplacement de cette ligne.

Supposons le théorème démontré pour $(m-2)$ et pour $(m-1)$ sommets.

Conservons les mêmes notations que dans le théorème précédent. Le centre X des moyennes distances des m sommets se trouve sur la droite ae, et l'on a

$$\frac{a\mathrm{X}}{\mathrm{X}e} = \frac{2}{m-2}.$$

Fig. 5.



Menons la perpendiculaire $\mathrm{X}p$ à $x'x^{(m)}$, les points r, l, p, O' sont fixes. Menons el, er, et posons $\mathrm{O}'x^{(m)} = \rho_1$, $lb' = \rho_{m-1}$. On a

$$\begin{aligned} m.p\mathrm{X} &= \mathrm{O}'e + (m-1)\,lg,\\ m.p\mathrm{X} &= 2\,\mathrm{O}'e + (m-2)\,ra,\\ (m-1)^2\,\overline{lg}^2 - \overline{\mathrm{O}'e}^2 &= (m-1)^2\rho_{m-}^2 - \rho_1^2. \end{aligned}$$

On en tire

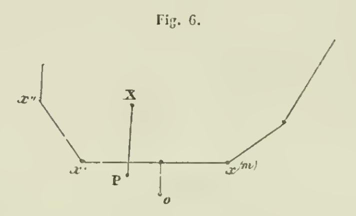
$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} &m.p\mathrm{X} - \mathrm{O}'e = (m-1)\,lg,\\ &m(m-2)^2\,p\mathrm{X}\,ra = (m-1)^2\rho_{m-1}^2 - \rho_1^2.\\ &(m-1)^2\,\overline{lg}^2 - \overline{\mathrm{O}'e}^2 = m.p\mathrm{X}(m.p\mathrm{X} - 2\,\mathrm{O}'e). \end{aligned}\right.$$

La relation (α) démontre le théorème énoncé. Cela posé, les théorèmes I et II nous ont démontré que les théorèmes III et IV étaient vrais pour trois points consécutifs. Ils sont donc vrais d'une manière générale.

Théorème V. — *Si la ligne polygonale $\alpha\beta\gamma\ldots$ se ferme une seule fois, elle se fermera toujours, et le centre des moyennes distances des sommets du polygone fermé $\alpha\beta\gamma\ldots$ restera fixe pendant le déplacement de ce polygone.*

Supposons que la droite $x' x^{(m)}$ (*fig.* 6), qui ferme la ligne polygo-

Fig. 6.



nale, soit tangente à la conique Φ, la ligne pX devra être perpendiculaire à la fois à tous les côtés, ce qui exige que p et X soient confondus. La relation (α) nous montre que l'on a alors

$$(m-1)\rho_{m-1} = \rho_1;$$

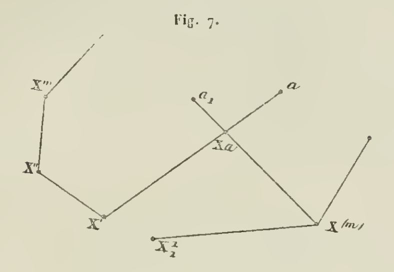
donc, si la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$ se ferme, le centre des moyennes distances des sommets de la ligne, dans la position où elle se ferme, est le centre de similitude des deux circonférences décrites, dans le mouvement de la ligne, par chaque sommet et par les centres des moyennes distances de $(m-1)$ sommets consécutifs.

Déplaçons le premier sommet x' de la ligne fermée en X′ (*fig.* 7), et soient X′, X″, ..., $X^{(m)}$, m sommets consécutifs de la ligne dans cette nouvelle position : je dis qu'elle est encore fermée.

En effet, par un deuxième déplacement, amenons X′ en X″, les m sommets seront alors (X″, X‴, ..., $X^{(m)}$, X'_1). Il suffit de prouver que X′ et X'_1 coïncident. En effet, soit a le centre des moyennes distances

des $(m-1)$ points $(X'', X''', \ldots, X^{(m)})$, a_1 celui des points $(X', X'', X''', \ldots, X^{(m-1)})$, a_2 celui des points $(X'_1, X^{(m)}, \ldots, X'')$. Les droites

Fig. 7.



aX', $a_1X^{(m)}$ se coupent en un point X_α qui est le centre des moyennes distances des m sommets $(X', X'', \ldots, X^{(m)})$, et, comme on a

$$\frac{aX_\alpha}{X_\alpha X'} = \frac{a_1 X_\alpha}{X_\alpha X^{(m)}} = \frac{1}{m-1},$$

le point X_α n'est autre que le centre de similitude X des circonférences décrites respectivement par les points $a, a_1, a_2, \ldots$, et les points $X', X'', \ldots, X^{(m)}, X'_1$.

Dès lors on verra de même que aX'_1 passe aussi par ce même point X ; donc X' et X'_1 coïncident.

Autre énoncé du même théorème. — *Si un polygone peut être inscrit à une circonférence et circonscrit à une conique dont l'un des foyers est au centre de la circonférence, il existe une infinité de polygones jouissant de la même propriété ; le centre des moyennes distances des sommets de tous ces polygones est le même.*

Problème. — *Trouver le rayon de la circonférence, sur laquelle se trouvent les centres des moyennes distances de n sommets consécutifs de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$*

Soient n sommets consécutifs $(1, 2, 3, \ldots, n)$; g_{n-2}, g_n, g_2 les centres des moyennes distances des trois groupes de sommets

$$[2, 3, \ldots, (n-1)], (1, 2, 3, \ldots, n), (1, 2).$$

Soient encore

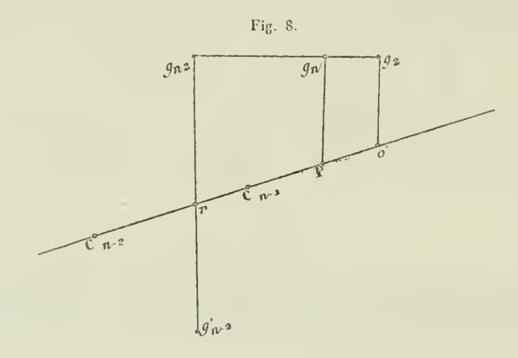
O′ le centre du cercle circonscrit à la ligne $\alpha\beta\gamma$;

C_{n-1} le centre du cercle sur lequel sont situés les centres des moyennes distances de $(n-1)$ sommets consécutifs de la ligne $\alpha\beta\gamma$;

r et p les pieds des perpendiculaires abaissées des points g_{n-2} et g_n sur la droite (1, 2).

Les points O′, C_{n-1}, p, r (*fig.* 8) sont sur le grand axe de la conique Φ inscrite dans la ligne $\alpha\beta\gamma$.

Fig. 8.



Le théorème IV nous a donné la relation

$$(\alpha) \qquad n(n-2)\, pg_n\, rg_{n-2} = (n-1)^2 \rho_{n-1}^2 - \rho_1^2.$$

Posons $O'C_{n-1} = \delta_{n-1}$; nous avons

$$O'p = \delta_{n-1}\frac{n-1}{n},$$

$$O'r = \delta_{n-1}\frac{n-1}{n-2}.$$

Soit C_{n-2} le centre du cercle des points g_{n-2}; la corde rg_{n-2} rencontre ce cercle en un deuxième point g'_{n-2} et l'on a

$$(\beta) \qquad rg_{n-2}\; rg'_{n-2} = \rho_{n-2}^2 - (\delta_{n-2} - O'r)^2.$$

Divisons (α) par (β), nous aurons

$$\frac{pg_n}{rg'_{n-2}} = \frac{(n-1)^2 \rho_{n-1}^2 - \rho_1^2}{n(n-2)\left[\rho_{n-2}^2 - (\delta_{n-2} - O'r)^2\right]}.$$

Or

$$\frac{pg_n}{rg'_{n-2}} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-2}} = \frac{O'p - \delta_n}{\delta_{n-2} - O'r}.$$

On a donc enfin

$$(\mathrm{R}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n\rho_n}{(n-2)\rho_{n-2}} &= \frac{(n-1)\delta_{n-1} - n\delta_n}{(n-2)\delta_{n-2} - (n-1)\delta_{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)^2\rho_{n-1}^2 - \rho_1^2}{(n-2)^2\rho_{n-2}^2 - \left[(n-2)\delta_{n-2} - (n-1)\delta_{n-1}\right]^2}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (R) nous permettent de calculer ρ_n si nous connaissons ρ_{n-1} et ρ_{n-2} ainsi que δ_{n-1} et δ_{n-2}.

Nous pouvons donc faire un tableau des valeurs de ρ_n pour les diverses valeurs de n.

Cela posé, si la ligne α forme un polygone fermé de m côtés, on aura entre les quantités ρ_n les relations suivantes :

$$(\mathrm{M}) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_m &= 0, \\ (m-1)\rho_{m-1} &= \rho_1, \\ (m-2)\rho_{m-2} &= 2\rho_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

L'une quelconque de ces relations exprimera que la ligne α forme un polygone fermé. Appelons ρ_1, ρ_2 les rayons des circonférences décrites par les sommets du polygone α et par les milieux de ses côtés, δ_2 la distance des centres de ces deux cercles; comme ρ_m, ρ_{m-1}, ρ_{m-2}, ... sont des fonctions de ρ_1, ρ_2, δ_2 que nous savons calculer par la formule (R), l'une quelconque des relations (M) donne la relation qui doit exister entre ρ_1, ρ_2, δ_2 pour que le polygone α existe.

Si aux sommets du polygone α on mène des tangentes au cercle décrit par ces sommets, ces droites formeront un polygone A inscrit et circonscrit à deux cercles de rayons R et ρ_1, et l'on aura, pour dé-

terminer R et la distance des centres δ, la relation

$$\frac{\delta}{\delta_2} = \frac{R}{\rho_2} = \frac{R^2 - \delta^2}{\rho_1^2}.$$

Si $f(\rho, \rho_2, \delta_2) = 0$ est la condition trouvée pour que le polygone α existe, $f\left(\rho', \frac{R\rho_1^2}{R^2 - \delta^2}, \frac{\delta\rho_1^2}{R^2 - \delta^2}\right) = 0$ sera la condition pour que le polygone A de m côtés existe. Proposons-nous de trouver la fonction f.

Reprenons les formules (R) :

$$(\mathrm{R}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n\rho_n}{(n-2)\rho_{n-2}} &= \frac{(n-1)\delta_{n-1} - n\delta_n}{(n-2)\delta_{n-2} - (n-1)\delta_{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)^2\rho_{n-1}^2 - \rho_1^2}{(n-2)^2\rho_{n-2}^2 - [(n-2)\delta_{n-2} - (n-1)\delta_{n-1}]^2}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\begin{aligned} 2\delta_2 &= x_1, & \frac{3\rho_3}{\rho_1} &= a_1, \\ 3\delta_3 &= x_2, & \frac{4\rho_4}{2\rho_2} &= a_2, \\ \ldots\ldots&, & \ldots\ldots&, \\ n\delta_n &= x_{n-1}, & \frac{(n+2)\rho_{n+2}}{n\rho_n} &= a_n. \end{aligned}$$

Les formules (R) nous donnent

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1(1 + a_1), \\ x_3 &= x_2(1 + a_2) - a_2 x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_{n-1}(1 + a_{n-1}) - a_{n-1}x_{n-2}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1(1 + a_1), \\ x_3 &= x_1(1 + a_1 + a_1 a_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_1(1 + a_1 + a_1 a_2 + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}). \end{aligned}$$

Si nous revenons aux précédentes notations, la dernière relation

devient

$$(n+1)\delta_{n+1} = \frac{\delta_2}{\rho_1\rho_2}[1.2.\rho_1\rho_2 + 2.3.\rho_2\rho_3 + \ldots + n(n+1)\rho_n\rho_{n+1}].$$

Remplaçons (n) par $(n-1)$ et $(n-2)$, et retranchons les résultats, nous aurons enfin

$$(n-1)\delta_{n-1} - (n-2)\delta_{n-2} = \frac{\delta_2}{\rho_1\rho_2}(n-2)(n-1)\rho_{n-2}\rho_{n-1}.$$

Substituons cette valeur dans la deuxième des relations (R), il vient

$$\frac{n\rho_n}{(n-2)\rho_{n-2}} = \frac{(n-1)^2\rho_{n-1}^2 - \rho_1^2}{(n-2)^2\rho_{n-2}^2 - \dfrac{\delta^2}{\rho_1^2\rho_2^2}(n-2)^2(n-1)^2\rho_{n-2}^2\rho_{n-1}^2}.$$

Posons $\frac{n\rho_n}{\rho_1} = Z_n$, $\frac{\delta_2}{\rho_2} = \alpha$; nous aurons enfin

$$(R') \qquad (Z_n Z_{n-2})(1 - \alpha^2 Z_{n-1}^2) + 1 - Z_{n-1}^2 = 0.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$Z_1 = 1, \quad \alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}.$$

La relation (R') donne, pour le calcul des quantités Z_n, la série des relations

$$(R'') \qquad \begin{cases} Z_3 - \alpha^2 Z_3 Z_2^2 - Z_2^2 + 1 = 0, \\ Z_4 Z_2 - \alpha^2 Z_4 Z_2 Z_3^2 - Z_3^2 + 1 = 0, \\ Z_5 Z_3 - \alpha^2 Z_5 Z_3 Z_4^2 - Z_4^2 + 1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_n Z_{n-2} - \alpha^2 Z_n Z_{n-2} Z_{n-1}^2 - Z_{n-1}^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Cela posé, pour trouver la condition pour qu'un polygone de $2p$ côtés soit inscrit et circonscrit à deux cercles, il suffira d'écrire que Z_{p+1} est égal à Z_{p-1}; si le polygone a $(2p+1)$ côtés, on écrira que $Z_{p+1} = Z_p$. On voit à quel degré de simplicité ce problème difficile a été ramené; nous allons appliquer la méthode aux polygones de 3, 4, 5, 6, 7 côtés.

Pour le triangle on a

$$Z_2 = 1. \tag{3}$$

En remplaçant Z_2 par sa valeur, on a

$$\frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2} = 1,$$

qui est la relation d'Euler.

Pour le quadrilatère, $Z_3 = Z_1 = 1$. La première des équations (R″) donne alors

$$Z_2^2(1 + \alpha^2) - 2 = 0. \tag{4}$$

Pour le pentagone, $Z_3 = Z_2$. La première des équations (R″) nous donne encore

$$\alpha^2 Z_2^3 + Z_2^2 - Z_2 + 1 = 0. \tag{5}$$

Pour l'hexagone, $Z_4 = Z_2$. Les deux premières des équations (R″) nous donnent

$$Z_3 = \frac{Z_2^2 - 1}{1 - \alpha^2 Z_2^2},$$

$$Z_3^2 = \frac{Z_2^2 + 1}{1 + \alpha^2 Z_2^2}.$$

En réduisant, on trouve

$$\alpha^2 Z_2^4 + Z_2^2(1 + \alpha^2) - 3 = 0. \tag{6}$$

Pour l'heptagone, on a

$$Z_4 = Z_3.$$

Les deux premières des équations (R″) deviennent

$$Z_3 - \alpha^2 Z_3 Z_2^2 - Z_2^2 + 1 = 0,$$
$$Z_3 Z_2 - \alpha^2 Z_2 Z_3^3 - Z_3^2 + 1 = 0.$$

En réduisant, on trouve

$$(7)\quad \alpha^2 Z_2^6 - \alpha^2(\alpha^2+1)Z_2^5 - \alpha^2 Z_2^4 + (3\alpha^2+1)Z_2^3 - Z_2^2 - 2Z_2 + 1 = 0.$$

Écrivons, dans un tableau, les équations (3), (4), (5), (6), (7) :

$$(S)\quad \left\{ \begin{aligned} Z_2 - 1 &= 0,\\ Z_2^2(1+\alpha^2) - 2 &= 0,\\ \alpha^2 Z_2^3 + Z_2^2 - Z_2 + 1 &= 0,\\ \alpha^2 Z_2^4 + Z_2^2(\alpha^2+1) - 3 &= 0,\\ \alpha^2 Z_2^6 - \alpha^2(\alpha^2+1)Z_2^5 - \alpha^2 Z_2^4 &\\ + (3\alpha^2+1)Z_2^3 - Z_2^2 - 2Z_2 + 1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver la relation entre les rayons $R_1 \rho_1$ de deux cercles et la distance de leurs centres, pour qu'un polygone de 3, 4, 5, 6, 7 côtés soit inscrit et circonscrit aux deux cercles, il suffit de remplacer dans les formules (S) α et Z_2 par leurs valeurs, qui sont

$$\alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}.$$

Or, si α est nul, les deux cercles sont concentriques et les polygones sont réguliers; les formules (S) deviennent alors

$$(S')\quad \left\{ \begin{aligned} Z_2 - 1 &= 0,\\ Z_2^2 - 2 &= 0,\\ Z_2^2 - Z_2 + 1 &= 0,\\ Z_2^2 - 3 &= 0,\\ Z_2^3 - Z_2^2 - 2Z_2 + 1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (S') donnent pour Z_2 la valeur $\frac{2\rho_1}{R}$, le double du rapport des rayons de deux circonférences, auxquelles sont inscrits et circonscrits des *polygones réguliers* de 3, 4, 5, 6, 7 côtés.

Première remarque. — Pour trouver la condition cherchée relative à un polygone de $2p$ ou de $(2p+1)$ côtés, il suffira de considérer les $(p-1)$ premières des équations (R'').

Deuxième remarque. — On peut se proposer de trouver la relation cherchée, en fonction du nombre des côtés du polygone; pour cela, il faudrait pouvoir exprimer Z_n en fonction de n. On est donc amené aux deux questions suivantes :

1° n étant un nombre entier positif, existe-t-il une fonction $\varphi(n)$ satisfaisant à la relation

$$1 + \varphi(n)\varphi(n-2) - \varphi(n)\varphi(n-2)[\varphi(n-1)]^2\alpha^2 - [\varphi(n-1)]^2 = 0.$$

2° Trouver cette fonction.

$\varphi(n)$ étant trouvé, la relation cherchée en fonction de (n) serait

$$\varphi(u+1) - \varphi(u) = 0,$$

pour un polygone de $(2u + 1)$ côtés, et

$$\varphi(u+1) - \varphi(u-1) = 0,$$

pour un polygone de $(2u)$ côtés.

Mais ces deux questions paraissent présenter de sérieuses difficultés.

Troisième remarque. — L'équation (S), relative à l'hexagone, est bicarrée; on peut donc la résoudre et, par suite, construire avec la règle et le compas un hexagone satisfaisant aux conditions énoncées. Nous allons donner à ce propos un théorème beaucoup plus général :

Théorème VI. — *On peut avec la règle et le compas passer d'un polygone de p côtés inscrit et circonscrit à deux cercles à un polygone de $2p$ côtés inscrit et circonscrit à deux cercles.*

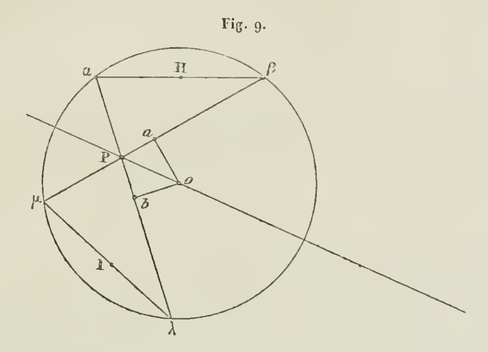
Considérons un polygone de $2p$ côtés inscrit et circonscrit à deux cercles; les points de contact de ses côtés avec le cercle intérieur sont les sommets d'un polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$; ce polygone est inscrit à un cercle, et ses milieux sont sur un autre cercle. Il suffit, évidemment, de démontrer le théorème énoncé, pour ce polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$.

Ce polygone ayant un nombre pair de côtés, les droites qui joignent les sommets opposés concourent en un même point; en effet, soient P et Q deux sommets opposés. Lorsque le polygone se déplace, les points P et Q sont tellement liés, qu'à une position de l'un ne corres-

pond qu'une seule position de l'autre, et réciproquement; donc PQ passe par un point fixe.

Cela posé, soient $\alpha\beta$, $\lambda\mu$ deux groupes de sommets opposés; les droites $\alpha\lambda$, $\beta\mu$ passent par un point fixe P. Les milieux a et b des

Fig. 9.



droites $\alpha\lambda$, $\beta\mu$ se déplacent sur une circonférence fixe, pendant le mouvement du polygone $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$.

Ces points a et b sont les sommets d'un polygone de p côtés, qui se déplace en restant inscrit à une circonférence.

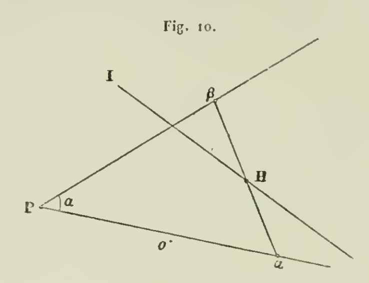
Pour prouver que ce polygone $ab\ldots$ est analogue de $\alpha\beta\gamma\ldots$, il suffit de montrer que le milieu de ab décrit une circonférence, et le théorème énoncé s'en déduira.

Or le milieu de ab est le milieu de la droite HI qui joint les milieux des côtés opposés $\alpha\beta$, $\lambda\mu$. Mais H et I sont les sommets opposés d'un polygone de $2p$ côtés qui se déplace en restant inscrit à une circonférence et circonscrit à une conique; donc HI passe par un point fixe, H et I étant sur une circonférence fixe, le milieu de HI, qui est aussi celui de ab, décrit un cercle.

Nous allons montrer maintenant comment, du polygone $ab\ldots$ de p côtés, on peut déduire, avec la règle et le compas, le polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$ de $2p$ côtés. Le côté ab étant donné, le point O est connu, les droites $P\alpha$, $P\beta$, IH sont connues, mais non les points α, β, H; pour les trouver, on est amené au problème suivant.

Trois droites étant données, $P\alpha$, $P\beta$, IH, *tracer une droite* $\beta H\alpha$, *qui soit coupée en* H, *en deux parties égales, et telle que* α *et* β *soient également distants d'un point* O.

Fig. 10.



Si l'on traite la question par l'Analyse, on trouve que le problème est résolu par l'intersection de la droite IH et d'une hyperbole ayant pour équation (en prenant pour axes les bissectrices de l'angle des droites $P\alpha$, $P\beta$)

$$2xy = (xx_0 + yy_0)\sin\alpha.$$

On voit que la question se résout très-simplement.

Théorème VII. — *On peut, avec la règle et le compas, construire un polygone inscrit et circonscrit à deux cercles, quand le nombre des côtés est de la forme* 3.2^p *ou* 4.2^p.

En effet, on sait construire le triangle et le quadrilatère inscrits et circonscrits à deux cercles, et, en vertu du théorème qui précède, on peut passer du triangle au polygone de 6, 12, 24, 48, ... côtés; et du quadrilatère au polygone de 8, 16, 32, ... côtés.

SUITE DE L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS (S).

L'une quelconque des équations (S) contient deux quantités seulement, α et Z_2, et l'on a

$$\alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}.$$

On peut poser divers problèmes, à propos de ces équations; on peut envisager la question de la manière suivante :

Les rayons R, ρ_1 de deux cercles étant donnés, trouver quelle doit être la distance δ de leurs centres pour qu'on puisse inscrire et circonscrire un polygone de m côtés aux deux cercles; dans ce cas, on a

$$\alpha = \frac{K}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2};$$

il faudra remplacer, dans l'équation (S) qui correspond au polygone considéré, α et Z_2 en fonction de l'inconnue δ, et l'équation changera. Si, au contraire, on se donne δ et R, on a

$$\alpha = K, \quad Z_2 = K'\rho_1,$$

K et K' étant des quantités données, et l'équation (S), où $Z_2 = K'\rho_1$ est l'inconnue, résout immédiatement le problème proposé. Supposons que l'on se donne le rayon R et la fonction $\frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}$, ρ_1 et δ étant deux inconnues; l'équation $(S) = 0$ pourra se résoudre en y regardant α comme l'inconnue; prenons, par exemple, le cas du polygone de sept côtés; l'équation (S) ne contient que α^2 et α^4 : on peut donc la résoudre, on en déduira une valeur de δ. Transportant cette valeur de δ dans la quantité donnée $\frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}$, on en déduira l'inconnue ρ_1; et le système des valeurs $R\rho_1\delta$, dont l'une était donnée et les deux autres viennent d'être calculées, correspondra à un heptagone. On aurait un résultat analogue pour le pentagone; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *On peut, avec la règle et le compas, tracer des polygones inscrits et circonscrits à deux cercles, lorsque le nombre de leurs côtés est de la forme* 5.2^p *ou* 7.2^p. *Remarquons que les rayons des deux cercles ne sont pas donnés, mais que l'on donne le rayon du cercle extérieur, et une certaine relation entre les rayons des deux cercles et la distance de leurs centres, cette relation étant ici*

$$\frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2} = a.$$

Nous avons trouvé, par les considérations qui précèdent, un système unique de valeurs $R \rho_1 \delta$ qui répondent à l'inscription, par exemple, d'un polygone de sept côtés. Si l'on demande d'inscrire dans un cercle donné de rayon R' un polygone de sept côtés qui soit inscrit à un autre cercle dont on ne donne pas le rayon, il SUFFIRA de prendre un système de valeurs $R' \rho'_1 \delta'$, respectivement proportionnelles à $R \rho_1 \delta$; si l'on donne à la fois deux des quantités $R' \rho'_1 \delta'$, le problème dépendra, en général, d'une équation que nous ne savons pas résoudre, et, par conséquent, on ne pourra pas construire le polygone à l'aide de la règle et du compas.

Remarque. — Le théorème qui précède offre cette particularité qu'il donne le moyen d'inscrire, dans un cercle donné, un polygone de sept côtés qui soit circonscrit à un cercle, tandis qu'on ne sait pas inscrire dans un cercle un polygone régulier de sept côtés. Ce que nous avons dit plus haut suffit pour expliquer cette anomalie apparente. A un polygone inscrit et circonscrit à deux cercles de rayons R, ρ_1 et de distance des centres δ, correspond un polygone formé par les points de contact des côtés du premier avec le cercle ρ_1. Ce deuxième polygone est inscrit dans un cercle de rayon ρ_1, et les milieux de ses côtés sont sur un cercle de rayon ρ_2; ses côtés sont tangents à une conique dont l'un des foyers est au centre de la circonférence ρ_1, dont la distance focale est $\frac{\delta_2}{2}$, et le demi-grand axe ρ_2. On a les relations

$$\alpha = \frac{\delta_2}{\rho_2}, \quad Z_2 = \frac{2\rho_2}{\rho_1},$$
$$\alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}.$$

Or, dans le théorème précédent, nous nous sommes donné Z_2, et nous en avons déduit $\frac{\delta}{R}$, au moyen de l'équation (S). Nous pouvons donc dire aussi que nous supposons donné $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, et que nous en déduisons $\frac{\delta_2}{\rho_2}$, ou encore que nous nous donnons ρ_2 et ρ_1 et que nous en déduisons δ_2. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème IX. — *On peut, avec la règle et le compas, tracer un*

polygone de 3, 4, 5, 6, 7 *côtés qui soit inscrit à un cercle donné, et circonscrit à une conique ayant pour foyer le centre du cercle et dont on donne le grand axe.*

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Nous avons indiqué, dans cette partie de notre étude, une méthode nouvelle et fort simple pour traiter les questions relatives aux polygones inscrits et circonscrits à deux cercles. Cette méthode nous a fourni un certain nombre de théorèmes intéressants, et peut en fournir un grand nombre, tous relatifs à la construction de ces polygones, selon le nombre de leurs côtés. Nous nous proposons d'étendre considérablement ces théorèmes; mais nous abandonnerons, pour le moment, cette partie, et nous allons donner un certain nombre de propriétés curieuses de ces mêmes polygones, toutes déduites du théorème IV et du théorème V.

DEUXIÈME PARTIE.

Définitions. — Pour éviter des redites et abréger le langage, nous donnerons quelques définitions :

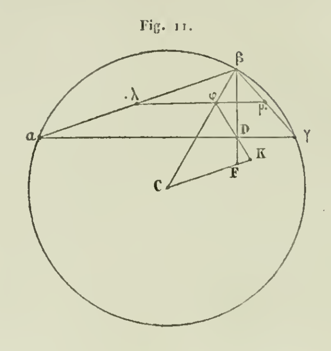
Une *ligne polygonale* A est une ligne polygonale *non fermée qui se déplace* en restant inscrite à la circonférence O et circonscrite à la circonférence C; un *polygone* A est un polygone *fermé qui se déplace* dans les mêmes conditions; *ligne polygonale* α, une ligne polygonale *non fermée,* formée, à chaque instant, par les points de contact des côtés de la ligne A avec le cercle intérieur, et *qui se déplace* en même temps que la ligne A; *polygone* α, un polygone fermé correspondant au polygone fermé A.

Théorème I. — *Dans une ligne* α, *la droite qui joint les milieux* λ, μ *de deux côtés consécutifs* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *touche une conique.*

Nous savons que la perpendiculaire βD, abaissée de β sur $\alpha\gamma$, passe par le deuxième foyer F de la conique Φ. Joignons Cβ, qui rencontre

$\lambda\mu$ en φ ; φD rencontre en K l'axe CF de la conique Φ. Nous savons que le produit FD, Fβ est constant ; donc KD est constant, et K est le

Fig. 11.



centre du cercle décrit par le point D. On a

$$C\varphi + \varphi K = C\varphi + \varphi D + DK = C\beta + DK.$$

Donc φ décrit une conique ayant pour foyers C et K, et ce point φ est le point de contact de $\lambda\mu$ avec cette courbe.

Théorème II. — *Dans une ligne* A, *le centre du cercle inscrit au triangle formé par un côté et les prolongements des deux côtés adjacents décrit une circonférence.*

Soient α, β, γ trois sommets consécutifs de la ligne α ; αA, Aβ, Bγ trois côtés de la ligne A. Menons CA, CB et Aβ', Bβ' perpendiculaires à ces droites ; par le deuxième foyer F de la conique Φ, menons FA', FB' parallèles à FA, FB.

On a

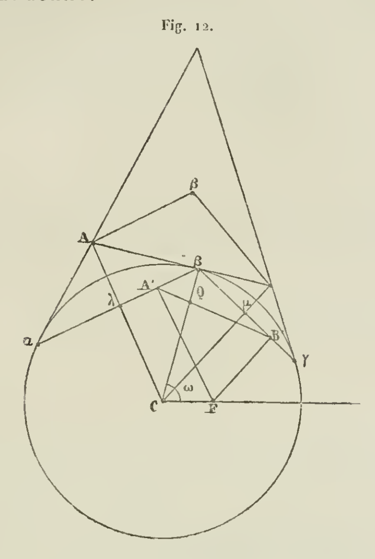
$$C\lambda . FA' = \text{const.},$$
$$C\lambda . CA = \text{const.} ;$$

d'où

$$\frac{FA'}{CA} = \text{const.}$$

La figure CAβ'B est donc homothétique à la figure FA$'\beta$B$'$; le théorème est donc démontré.

Fig. 12.



Théorème III. — *La surface d'un polygone* A *reste, pendant le déplacement du polygone, proportionnelle à celle du polygone* α *correspondant.*

Reportons-nous à la figure précédente : il suffit de démontrer que la surface du polygone formé par les points A$'$, B$'$, ... reste proportionnelle à celle du polygone α.

On a

$$\beta Q = C\beta - CQ = R - (a + b\cos\omega)$$

(R, a, b étant trois constantes égales respectivement, R au rayon du cercle C; a à la distance constante du point F au côté A$'$B$'$, et b à la distance CF).

$$\Sigma(A'B'\beta Q) = (R - a)\Sigma A'B' - b\,\Sigma A'B'\cos\omega = (R - a)\Sigma A'B',$$

c'est-à-dire,

$$\text{surface}(\alpha\beta\gamma\ldots) - \text{surface}(A'B'\ldots) = (R - a)\Sigma A'B'.$$

Or

$$\text{surface}(A'B'\ldots) = a\,\Sigma A'B';$$

donc

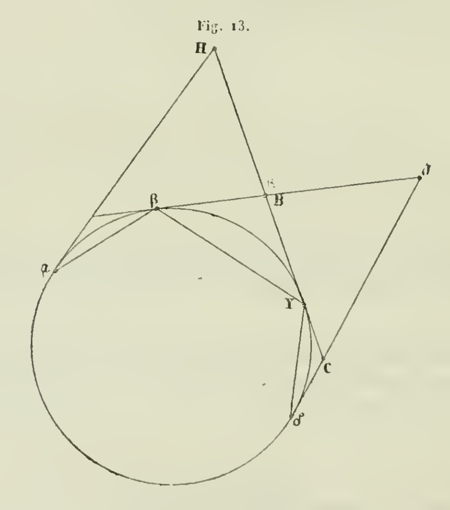
$$\text{surface}(\alpha\beta\gamma\ldots) = R\,\Sigma A'B'.$$

Ces deux relations démontrent le théorème :

Théorème IV. — *La surface d'un polygone* A *reste, pendant le déplacement du polygone, proportionnelle à la somme des sinus de ses angles, et aussi à la somme des droites qui joignent ses sommets de deux en deux.*

Ce théorème est évident, en vertu du précédent.

Fig. 13.

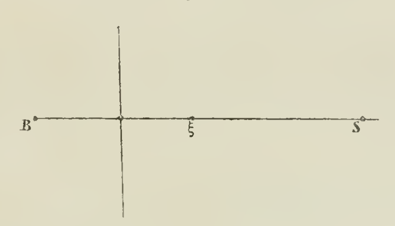


Théorème V. — *Les centres des cercles circonscrits aux triangles formés par un côté d'une ligne* A *et les prolongements des deux côtés adjacents sont les sommets d'une ligne polygonale inscrite et circonscrite à deux coniques.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre sommets consécutifs de la ligne α; ABH, BJC les deux triangles de la ligne A qui leur correspondent.

Le cercle circonscrit à ABH est le transformé par rayons vecteurs réciproques du cercle des neuf points du triangle $\alpha\beta\gamma$; or le centre de ce cercle des neuf points décrit une circonférence, car le centre des moyennes distances des points $\alpha\beta\gamma$ en décrit une; le rayon de ce cercle

Fig. 14.



des neuf points est constant; donc il touche deux cercles concentriques : son transformé ABH touche donc aussi deux cercles, son centre décrit donc une conique.

Soient B et ξ les deux points de rencontre des cercles ABH, BJC; la droite $B\xi$ passe au centre S de similitude des deux cercles auxquels sont tangents les cercles ABH, BJC, de plus

$$SB.S\xi = \text{const.};$$

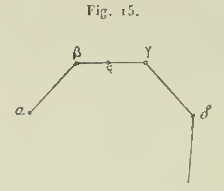
donc, en vertu du théorème II de la Ire Partie, la perpendiculaire élevée au milieu de $B\xi$, laquelle passe par les centres des cercles ABH, BJC, touche une conique.

Théorème VI. — *Dans une ligne α qui se déplace, les centres des hyperboles équilatères passant par quatre sommets consécutifs décrivent une circonférence.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre sommets consécutifs : le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre points est au point de rencontre des cercles des neuf points des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$; ces cercles se ren-

contrent déjà au milieu φ de $\beta\gamma$, de plus ils touchent deux cercles fixes; donc, en répétant le raisonnement du théorème précédent, on

Fig. 15.



voit que le deuxième point de rencontre de ces cercles décrit un cercle fixe.

Théorème VII. — *Dans un polygone α qui se déplace, la somme des carrés des côtés reste constante.*

Soient $x', y', x'', y'', \ldots$ les coordonnées des sommets du polygone α, par rapport à deux axes rectangulaires passant par le point C, l'axe des x étant l'axe de la conique Φ.

Les sommets du polygone α et les milieux de ses côtés décrivant des circonférences, on a

$$x'^2 + y'^2 = \mathrm{R}^2, \quad \left(\frac{x' + x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y' + y''}{2}\right)^2 + \mathrm{A}\,\frac{x' + x''}{2} + \mathrm{B} = 0,$$

$$x''^2 + y''^2 = \mathrm{R}^2, \quad \left(\frac{x'' + x'''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'' + y'''}{2}\right)^2 + \mathrm{A}\,\frac{x'' + x'''}{2} + \mathrm{B} = 0.$$

On en déduit

$$x'x'' + y'y'' + \mathrm{A}(x' + x'') + \mathrm{B}_1 = 0$$
$$x''x''' + y''y''' + \mathrm{A}(x'' + x''') + \mathrm{B}_1 = 0.$$

En appelant S^2 la somme des carrés des côtés, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^2 &= \Sigma[(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2] \\ &= \mathrm{K} + \Sigma(x'x'' + y'y'') = \mathrm{K}_1 + \mathrm{A}_1\Sigma x'.\end{aligned}$$

Or $\Sigma x'$ est constant, car le centre des moyennes distances des som-

mets du polygone α est fixe, en vertu du théorème V de la Ire Partie.

Théorème VIII. — *La somme des carrés des droites qui joignent les sommets du polygone α, pris de deux en deux, reste constante, pendant le déplacement de ce polygone.*

En effet, les milieux des côtés du polygone α décrivant une circonférence, on a

$$\Sigma(x'x'' + y'y'') = \text{const.}$$

Les centres des moyennes distances de trois sommets consécutifs du polygone α décrivant une circonférence, on a de même

$$\Sigma[(x'x'' + x'x''' + x''x''') + (y'y'' + y'y''' + y''y''')] = \text{const.}$$

On en déduit

$$\Sigma(x'x''' + x'y''') = \text{const.}$$

Le théorème est démontré par cette relation.

Théorème IX. — *La somme des carrés des droites qui joignent les sommets du polygone α, pris de p en p, reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

Même démonstration que pour les deux théorèmes précédents. Cette somme varie d'ailleurs avec p.

Théorème X. — *Dans un polygone* A, *la somme des cosinus des angles reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

Conséquence évidente du théorème VII.

Théorème XI. — *Dans un polygone* A, *la somme des cosinus des angles formés par deux côtés, pris de p en p, reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

Conséquence évidente du théorème IX.
Cette somme varie d'ailleurs avec p.

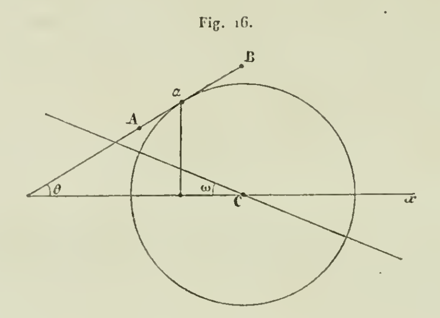
Théorème XII. — *La somme des cosinus des angles que font tous les côtés d'un polygone* A *avec une direction fixe reste constante, pendant*

le déplacement de ce polygone. Cette somme varie d'ailleurs avec la direction choisie.

Soit AB un des côtés du polygone, α le point où il touche le cercle C. Menons par le centre C une parallèle à la direction donnée; $\cos\theta$ est proportionnel à la distance du point α à cette droite Cx.

Donc la somme des $\cos\theta$ est proportionnelle à la somme des distances des points α à une droite fixe, et cette dernière somme est constante en vertu du théorème V de la Ire Partie. De même $\Sigma\sin\theta$ est constante.

Fig. 16.



Le centre des moyennes distances des points α est un point fixe situé sur la ligne des centres des deux cercles auxquels le polygone A est inscrit et circonscrit; appelons Δ la distance de ce point au centre C et ω l'angle que fait la ligne des centres avec la direction Ox; nous aurons

$$\Sigma\cos\theta = \frac{\Sigma y'}{\rho_1} = \frac{m\,\Delta\sin\omega}{\rho_1},$$

$$\Sigma\sin\theta = \frac{m\,\Delta\cos\omega}{\rho_1}.$$

On en déduit

$$\frac{\Sigma\sin\theta}{\Sigma\cos\theta} = \cot\omega.$$

On a donc le théorème suivant :

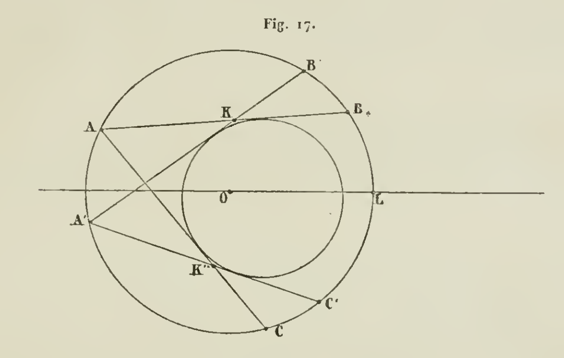
Théorème XIII. — *Lorsqu'un polygone se déplace en restant inscrit*

et circonscrit à deux cercles, le rapport entre la somme des sinus des angles formés par tous ses côtés avec une direction fixe et la somme des cosinus de ces mêmes angles reste constant, quel que soit le nombre des côtés du polygone.

Remarque. — Nous allons donner du théorème XII, qui est important, une démonstration directe.

Soient B, A, C trois sommets consécutifs du polygone A; B′, A′, C′ les positions de ces points après un déplacement infiniment petit du polygone A. Menons par le centre O du cercle extérieur une parallèle à la

Fig. 17.



direction donnée; nous pouvons déterminer un sommet B du polygone A par l'arc $LB = \varphi$, compté à partir du point L. Nous aurons

$$\frac{d\varphi}{BK} = \frac{d\varphi'}{AK} = \frac{d\varphi'}{AK'} = \frac{d\varphi''}{K'C} = \frac{d\varphi + d\varphi'}{AB} = \frac{d\varphi + d\varphi''}{AC}.$$

Cela posé, le polygone BAC... se fermant, en appelant θ l'angle d'un de ses côtés AB avec la droite fixe Ox, on a

$$\Sigma\, AB \sin\theta = 0.$$

Or

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi' - \pi}{2}, \quad d\theta = \frac{d\varphi + d\varphi'}{2}, \quad AB = K(d\varphi + d\varphi') = 2K\, d\theta;$$

donc

$$\Sigma \sin\theta \, d\theta = 0;$$

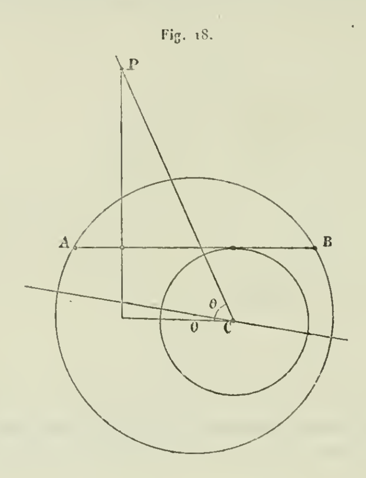
par suite

$$\Sigma \cos\theta = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème XIV. — *Quand un polygone A se déplace, la somme des distances d'un point fixe du plan à ses côtés reste constante. Cette somme varie avec la position du point dans le plan.*

Soient P le point fixe, AB un côté du polygone. Joignons CP, la

Fig. 18.



droite CP reste fixe pendant le déplacement du polygone. En appelant δ la distance de P à AB, on a

$$\delta + \rho_1 = \text{CP} \sin\theta,$$
$$\Sigma\,\delta + m\rho_1 = \text{CP}\,\Sigma \sin\theta.$$

On voit que $\Sigma\,\delta$ reste constante.

Nous avons

$$\Sigma \sin\theta = \frac{m\,\Delta \cos\omega}{\rho_1};$$

donc

$$\Sigma\delta = \frac{\text{CP}\, m\, \Delta \cos\omega}{\rho_1} - m\rho_1.$$

On voit que cette somme des distances reste la même lorsque le point P se déplace sur une perpendiculaire à la ligne des centres, menée à une distance du point C égale à $\frac{\rho_1^2}{\Delta}$; cette somme est alors nulle.

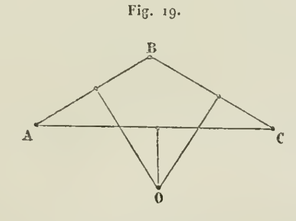
Cette somme des distances reste encore la même et égale à $-m\rho_1$, lorsque le point P se déplace sur la perpendiculaire à la ligne des centres, menée par le point C. Enfin cette somme des distances conserve la même valeur pour tous les points P, situés sur une même perpendiculaire à la ligne des centres.

Théorème XV. — *La somme des distances du centre* O *du cercle circonscrit au polygone* A, *aux droites qui joignent les sommets de ce polygone pris de deux en deux, reste constante pendant le déplacement de ce polygone.*

En effet, chacune de ces distances est proportionnelle au cosinus d'un des angles du polygone.

Théorème XVI. — *La somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles formés par trois sommets consécutifs du polygone* A *reste constante, pendant le déplacement de ce polygone.*

Fig. 19.



Soient A, B, C trois sommets consécutifs, appelons δ', δ'', δ''' les distances de O aux trois droites AB, BC, AC.

On a, en appelant r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC,

$$R + r = \delta' + \delta'' + \delta''',$$
$$\Sigma r = \Sigma \delta' + \Sigma \delta'' + \Sigma \delta''' - m R.$$

Or $\Sigma \delta'$, $\Sigma \delta''$ sont constantes, en vertu du théorème XIV, et $\Sigma \delta'''$ est constante en vertu du théorème XV.

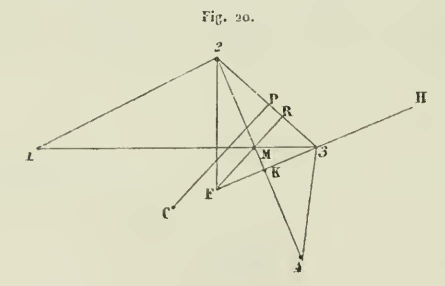
Théorème XVII. — *La somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles formés par un côté du polygone* A, *et les prolongements des deux côtés adjacents, reste constante, quand le polygone se déplace.*

Reportons-nous à la figure du théorème II. Le rayon du cercle inscrit au triangle AHB est la distance de β' au côté AB; or cette distance est proportionnelle à βQ ou à Cβ — CQ; or la somme des longueurs CQ reste constante en vertu du théorème XIV.

Théorème XVIII. — *Si l'on considère quatre sommets consécutifs* (1, 2, 3, 4,) *d'un polygone* α, *les droites* (13), (24) *se rencontrent en un point* M.

Ce point M est le sommet d'un polygone qui se déplace en même temps que le polygone α et qui jouit des propriétés suivantes : il est

Fig. 20.



inscrit à un cercle et circonscrit à une conique; le centre des moyennes distances de ses sommets est fixe; la somme des carrés de ses côtés est constante.

En effet, les perpendiculaires abaissées des points 2 et 3 sur les droites (13), (24) passent par le deuxième foyer F de la conique Φ; et l'on a, en vertu du théorème II, Ire Partie,

$$F\mu . FR = FK . F3 = \text{const.},$$
$$FR . CP = \text{const.},$$

d'où

$$\frac{FM}{CP} = \text{const.}$$

Cette dernière relation démontre le théorème.

Théorème XIX. — *Le point* K, *projection du sommet* (3), *sur le côté* (24), *est le sommet d'un polygone qui jouit des mêmes propriétés que le polygone des points* M (voir la figure du théorème précédent).

En effet, si H est le point de concours des hauteurs du triangle (2, 3, 4), on a

$$\frac{FK}{FH} = \text{const.};$$

donc le point K décrit une courbe homothétique à celle du point H_1, et par suite à celle du centre G_3 des moyennes distances des trois points (2, 3, 4).

Théorème XX. — *Si l'on considère, dans un polygone* α, *les centres des moyennes distances de* p *sommets consécutifs, ces points sont les sommets d'un polygone qui jouit des propriétés suivantes :*

1° Il se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à une conique fixe.

2° Le centre des moyennes distances de ses sommets est fixe.

3° La somme des carrés de ses côtés reste constante.

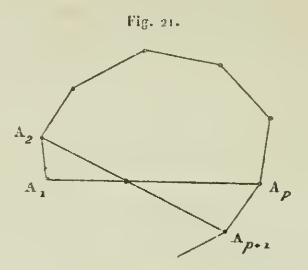
4° La somme des carrés des droites qui joignent ses sommets de n en n reste constante.

Ces propriétés se déduisent aisément des théorèmes précédents.

Théorème XXI. — *Si, en considérant un polygone* α, *on mène par un point* a_1 *du plan une droite égale et parallèle à* A_1A_p *qui joint les*

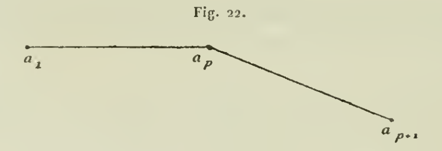
sommets A_1, A_p, *puis par l'extrémité* a_p *de cette droite, une droite égale et parallèle à* $A_2 A_{p+1}$, *et ainsi de suite, on formera un polygone fermé inscrit à un cercle et circonscrit à une conique; lorsque le polygone* α

Fig. 21.



se déplacera, le polygone des points α *se déplacera en même temps, le cercle et la conique auxquels il est inscrit et circonscrit tourneront autour du point* a_1 *sans changer de grandeur ni de position relative,*

Fig. 22.



et la somme des carrés des côtés $a_1 a_p$ *restera constante; enfin le centre des moyennes distances des points* $a_1\, a_p\, a_{p+1} \ldots$ *décrira un cercle ayant son centre au point* a_1.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que la droite $A_1 A_p$ est parallèle en direction, et proportionnelle en grandeur à la droite qui joint les centres des moyennes distances des deux groupes de points $(A_1 A_2 \ldots A_{p-1})$, $(A_2 A_3 \ldots A_p)$.

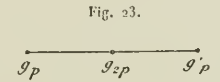
Remarque. — Si le polygone α a un nombre pair de $2m$ côtés, et qu'on joigne les sommets de m en m, le polygone $a_1\, a_m\, a_{m+1} \ldots$, construit comme nous venons de le faire, aura ses côtés opposés égaux et

parallèles; le cercle et la conique auxquels ce polygone est inscrit et circonscrit seront donc concentriques.

THÉORÈME XXII. — *Si dans un polygone α on considère $2p$ sommets consécutifs, et qu'on joigne les centres des moyennes distances des p premiers et des p suivants, la droite ainsi obtenue est le côté d'un polygone analogue de α, c'est-à-dire dont les sommets décrivent une circonférence, pendant que les milieux de ses côtés décrivent aussi une circonférence.*

En effet, soient g_p, g'_p les centres des moyennes distances des sommets $(1, 2, 3, \ldots, p)$ $(p+1, p+2, \ldots, 2p)$; le milieu g_{2p} de la droite

Fig. 23.



$g_p g'_p$ est le centre des moyennes distances des points $(1, 2, 3, \ldots, 2p)$; donc il décrit une circonférence, et le théorème se trouve démontré.

Si p est premier avec m nombre des côtés du polygone α, et plus petit que $\frac{m}{2}$, le polygone des points g_p aura m côtés; cela posé, nous appellerons *polygones α distincts* deux polygones de m côtés, tels qu'un côté dans le premier polygone partage le plan en deux régions dont l'une contient K sommets et l'autre $(m - K - 2)$, tandis que dans le deuxième polygone K se change en K'.

On voit donc qu'il y a autant de polygones α distincts, de m côtés, qu'il y a d'entiers premiers avec m et plus petits que $\frac{m}{2}$.

Supposons construit un quelconque de ces polygones de m côtés, qui sera inscrit à un cercle de rayon ρ_1, pendant que les milieux de ses côtés seront sur un cercle de rayon ρ_2, et tel que la distance des centres des deux cercles soit δ_2; à ce polygone α correspond un polygone A de m côtés inscrit à un cercle de rayon R, circonscrit au cercle ρ_1, la distance des centres des deux cercles étant égale à δ.

Si, dans le polygone α, nous considérons les centres des moyennes distances g_p, g'_p, g''_p, ..., pour toute valeur de p première avec m et plus

petite que $\frac{m}{2}$, ces points seront les sommets d'un polygone α_p de m côtés, dont les *éléments* seront $\rho_p\,\rho_{2p}\,(\delta_{2p}-\delta_p)$; à ce polygone α_p correspondra un polygone A_p dont les éléments seront R_p, ρ_p, δ'_p, et les quantités R_p, ρ_p, δ'_p seront des *fonctions rationnelles* des données R, ρ_1, δ, fonctions que nous savons calculer au moyen des formules (R″) de la Iʳᵉ Partie.

On en déduit aisément le théorème suivant :

Théorème XXIII. — *L'équation* $(S)=0$, *ou* $f(Z, \alpha^2)=0$ (voir Iʳᵉ Partie), *est telle que, si l'on en connaît* une seule racine réelle et positive, *toutes les autres racines réelles et positives peuvent se calculer rationnellement et successivement en fonction de la première.*

Pour appliquer ce théorème à un exemple, considérons l'équation du sixième degré $\varphi(Z_2, \alpha^2)=0$, qui correspond au polygone de sept côtés; remarquons qu'il y a trois polygones α *distincts* de sept côtés.

Donnons-nous α et R, nous aurons alors $Z_2=K'\rho_1$ et l'équation $\varphi=0$ nous donnera Z_2, c'est-à-dire ρ_1; à une valeur déterminée réelle et positive de Z_2, satisfaisant à l'équation $\varphi=0$, correspond un polygone A dont les *éléments* sont δ, R, ρ_1; ce polygone peut donc être construit : par suite aussi le polygone α qui lui correspond. Cela posé, calculons, au moyen des formules (R), les valeurs ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5; nous aurons

$$\rho_4=\rho_3,\quad \rho_5=\rho_2,\quad Z_2=\frac{2\rho_2}{\rho_1},\quad Z_3=\frac{3\rho_3}{\rho_1},$$

$$z_3-\frac{\delta^2}{R^2}Z_2^2-Z_2^2+1=0.$$

Calculons aussi δ_2, δ_3, δ_4.

Le polygone α de sept côtés, dont les *éléments* sont ρ_2, ρ_4, $(\delta_4-\delta_2)$, pourra donc être construit, par suite aussi les *éléments* ρ_2, R_2, δ'_2 du polygone A_2 correspondant, si nous posons $\alpha=\frac{\delta'_2}{R_2}$, $Z_2=\frac{2R_2\rho_2}{R_2^2-\delta'^2_2}$, ces valeurs de α et Z_2, substituées dans la relation $\varphi=0$, la rendront identique; c'est en ce sens qu'il faut entendre le théorème énoncé. Si donc, pour une valeur donnée de α, on connaît une valeur de Z_2 qui annule l'équation, on pourra calculer rationnellement deux autres

valeurs de Z_2 qui, pour une autre valeur de α dépendant de la première valeur donnée à α, rendent encore l'équation $\varphi = 0$ identique. Ces explications font nettement comprendre le théorème.

Théorème XXIV. — *Dans un polygone* A, *la somme des inverses des rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par un côté et les prolongements des deux côtés adjacents reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

Ce théorème se démontre facilement en s'appuyant sur ce que l'un de ces cercles est le transformé par rayons vecteurs réciproques du cercle des neuf points d'un triangle fermé par trois sommets consécutifs du polygone α.

Théorème XXV. — *Si l'on considère p sommets consécutifs d'une ligne* α, *et les p côtés d'une ligne* A *qui correspondent à ces points, le centre des moyennes distances de ces p sommets a pour polaire et, par suite, pour droite correspondante dans la ligne* A, *la droite lieu géométrique des points dont la somme des distances à ces p côtés de la ligne* A *est nulle.*

On peut donc appliquer à ces droites les théorèmes démontrés sur les centres des moyennes distances.

Théorème XXVI. — *Quand un polygone de 2m côtés se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, les côtés opposés se rencontrent en m points qui restent sur une droite fixe; les droites qui joignent les sommets opposés passent par un même point qui reste fixe.*

Ce théorème se démontre en remarquant qu'à une position d'un des sommets ou d'un des côtés ne correspond qu'une seule position du sommet ou du côté opposé, et réciproquement. Si nous considérons les m points déterminés sur la droite fixe par les points de rencontre des côtés opposés pris deux à deux, ou bien encore les m points d'intersection d'une droite fixe du plan, avec les m droites formées par les lignes qui joignent les sommets opposés pris deux à deux, et qui pivotent autour d'un point fixe, ces m points formeront sur la droite considérée un système de divisions en *involution du* $(m)^{\text{ième}}$ *ordre,*

c'est-à-dire qu'à une position de l'un d'eux ne correspondra qu'une seule position des $(m-1)$ autres, quel que soit le point choisi.

Cela posé, considérons, en particulier, un hexagone, nous aurons un système de trois points se déplaçant sur une droite fixe; appelons α, β, γ les distances de ces trois points à un point fixe quelconque de la droite; puisque les trois points se correspondent de telle manière qu'à une valeur de α correspondent deux valeurs β, γ, et que de même à la valeur β correspondent deux valeurs α, γ, et à la valeur γ deux valeurs α, β, nous aurons, entre α, β, γ, les trois relations

$$\begin{aligned}
&A\alpha^2\beta^2 + B(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) + C(\alpha^2 + \beta^2) + D\alpha\beta + E(\alpha + \beta) + F = 0,\\
&A\alpha^2\gamma^2 + B(\alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2) + \ldots + F = 0,\\
&A\beta^2\gamma^2 + \ldots + F = 0.
\end{aligned}$$

Éliminons β et γ entre ces trois relations, et exprimons que l'équation en α est identiquement satisfaite, nous aurons, entre les coefficients A, B, C, ..., F, les relations qui caractérisent l'*involution du deuxième ordre*. Nous ne faisons qu'indiquer cette généralisation, qui fera l'objet d'une étude ultérieure.

THÉORÈME XXVII. — *Il existe entre les angles qui déterminent les sommets d'un polygone α un grand nombre de relations faciles à trouver.*

Les coordonnées des sommets d'un polygone α pourront se représenter par

$$\begin{aligned}
&\rho_1\cos\omega_1,\quad \rho_1\cos\omega_2,\quad \ldots,\\
&\rho_1\sin\omega_1,\quad \rho_2\sin\omega_2,\quad \ldots.
\end{aligned}$$

Exprimons, par exemple, que la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur la droite qui joint les deux sommets adjacents passe par un point fixe, nous aurons

$$-\sin\omega_2(\sin\omega_3 - \sin\omega_1) + (A - \cos\omega_2)(\cos\omega_3 - \cos\omega_1) = 0;$$

d'où, en différentiant,

$$\left\{\begin{aligned}
0 = {} & d\omega_1[A\sin\omega_1 + \sin(\omega_2 - \omega_1)]\\
& + d\omega_2[\sin(\omega_2 - \omega_3) - \sin(\omega_1 + \omega_2)] + d\omega_3[A\sin\omega_3 - \sin(\omega_2 + \omega_3)].
\end{aligned}\right.$$

On a donc la relation suivante :

$$\begin{vmatrix}
A\sin\omega_1+\sin(\omega_2-\omega_1) & \sin(\omega_2-\omega_3)-\sin(\omega_1+\omega_2) & A\sin\omega_3-\sin(\omega_2+\omega_3) & 0, & 0, \\
0 & A\sin\omega_2+\sin(\omega_3-\omega_2) & \sin(\omega_3-\omega_4)-\sin(\omega_2+\omega_3) & A\sin\omega_4-\sin(\omega_3+\omega_4) & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{vmatrix} = 0.$$

On trouverait de même une série d'autres relations exprimées par des déterminants égalés à zéro.

THÉORÈME XXVIII. — *Si l'on a une série d'angles $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ entre lesquels il existe la série des relations suivantes, au nombre de m :*

$$\begin{gathered}
\cos(\omega_2-\omega_1)+A(\cos\omega_2+\cos\omega_1)+B=0,\\
\cos(\omega_3-\omega_2)+A(\cos\omega_3+\cos\omega_2)+B=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\cos(\omega_m-\omega_{m-1})+A(\cos\omega_m+\cos\omega_{m-1})+B=0,\\
\cos(\omega_1-\omega_m)+A(\cos\omega_1+\cos\omega_m)+B=0,
\end{gathered}$$

1° *On peut éliminer les m angles entre ces m équations, et obtenir par suite une relation entre* A *et* B.

2° *On a entre les angles la série des $\frac{m}{2}$ relations suivantes :*

$$\begin{gathered}
\Sigma\cos(\omega_2-\omega_1)=\text{const.},\\
\Sigma\cos(\omega_3-\omega_1)=\text{const.},\\
\Sigma\cos(\omega_4-\omega_1)=\text{const.},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\Sigma\cos\left(\omega_{\frac{m+1}{2}}-\omega_1\right)=\text{const.}
\end{gathered}$$

Ce théorème n'est que la traduction des théorèmes qui précèdent.

THÉORÈME XXIX. — *Dans un triangle* A, *le centre des moyennes distances des sommets décrit une circonférence pendant le déplacement du triangle.*

Représentons les coordonnées des trois sommets par

$$\begin{aligned} &R\cos\alpha_1, \quad R\sin\alpha_1,\\ &R\cos\alpha_2, \quad R\sin\alpha_2,\\ &R\cos\alpha_3, \quad R\sin\alpha_3. \end{aligned}$$

Posons

$$\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \xi, \quad \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = y.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \pm\rho_1 &= -\delta\xi + Ry,\\ \pm\rho_1 &= -\delta\xi' + Ry',\\ \pm\rho_1 &= -\delta\xi'' + Ry''. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} R^2\Sigma y^2 + \delta^2\Sigma\xi^2 - 3\rho_1^2 - 2\delta R\Sigma y\xi &= 0,\\ R^2\Sigma y^2 - \delta^2\Sigma\xi^2 + 3\rho_1^2 \mp 2R\rho_1\Sigma y &= 0,\\ R^2\Sigma y^2 - \delta R\Sigma y\xi \pm R\rho_1\Sigma y &= 0. \end{aligned}$$

Or $R\Sigma y$ est égal à $R+\rho_1$, car $R\Sigma y$ représente la somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle à ses côtés; donc

$$(1) \qquad R^2\Sigma y^2 - \delta R\Sigma y\xi \pm \rho_1(R+\rho_1) = 0.$$

Considérons un cercle dont le centre soit sur la droite qui joint les centres O et C des cercles inscrit et circonscrit au triangle, à une distance de O égale à $\frac{2\delta}{3}$, passant par le centre des moyennes distances des trois sommets et de rayon H, on aura

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} H^2 = &\left(\frac{R\cos\alpha_1 + R\cos\alpha_2 + R\cos\alpha_3}{3} - \frac{2\delta}{3}\right)^2\\ &+ (R\sin\alpha_1 + R\sin\alpha_2 + R\sin\alpha_3)^3. \end{aligned} \right.$$

Cette relation devient, en vertu de la relation (1),

$$4\delta^2 - 9h^2 - 3R^2 \pm 4\rho_1(R+\rho_1) = 0.$$

h est donc constant, et le théorème est démontré. On en déduit aisé-

ment que le point de concours des hauteurs décrit aussi une circonférence, et que le centre du cercle des neuf points en décrit une dont le centre est au centre du cercle inscrit et de rayon $\frac{R}{2} - \rho_1$. On a donc une démonstration très-courte de ce théorème, que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Théorème XXX. — *Le centre des moyennes distances des sommets d'un quadrilatère qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques décrit une conique : les deux diagonales sont les rayons homologues de deux faisceaux en involution.*

En effet, les deux diagonales passent par un point fixe, et leurs milieux décrivent une même conique, la droite qui joint ces milieux passant par un point fixe.

Théorème XXXI. — *Quand un polygone se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques ayant un foyer commun, la somme des cosinus des angles formés avec une droite fixe par les rayons vecteurs qui sont de ce foyer aux divers sommets reste constante. La somme des inverses de ces rayons vecteurs est constante. La somme des cosinus des angles formés par deux rayons vecteurs pris de p en p reste constante; cette somme varie d'ailleurs avec la valeur de p.*

Ces théorèmes sont des conséquences des théorèmes XI, XII, XIII.

RÉSUMÉ.

Nous avons ramené le problème proposé à l'étude d'un système d'équations particulier qui résout la question et donne la condition cherchée sans aucune élimination, et par des calculs successifs; il est important de remarquer que les relations cherchées étant trouvées pour tous les polygones dont le nombre des côtés est inférieur à n, la relation analogue relative au polygone de n côtés se déduit des relations précédentes. Nous avons indiqué de quelle *équation aux différences finies* dépend la solution du problème en fonction directe

du nombre des côtés. Nos formules comprennent, d'ailleurs, comme cas particulier, les polygones réguliers. Nous avons démontré un théorème nouveau (théorème V), qui nous a donné un grand nombre de conséquences formant la seconde Partie de notre travail. Nous nous proposons de faire une étude plus approfondie des équations fondamentales, qui paraissent devoir donner lieu à des recherches dignes d'intérêt.

Origine géométrique et représentation géométrique des fonctions elliptiques, abéliennes et de transcendantes d'ordres supérieurs ;

Par M. YVON VILLARCEAU.

Les géomètres, en s'occupant de la rectification des arcs de courbes, ont réussi à obtenir un certain nombre de représentations géométriques de quelques-unes des fonctions elliptiques; mais ils ne sont pas arrivés, autant que je le sache, à représenter, au moyen d'une courbe unique, l'ensemble des fonctions $\varphi = \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\sin \operatorname{am} u$ et $\Delta \operatorname{am} u$. Il y a quatre ans, j'indiquai à mon savant confrère, M. Bouquet, la courbe du quatrième degré qui remplit ces conditions, et ce dernier exposa, dans ses leçons à la Faculté des Sciences, la propriété de cette courbe, qui se rapporte à la représentation géométrique des fonctions elliptiques.

Des recherches entreprises à ce sujet, il résulte qu'un géomètre belge, M. Werhulst, a constaté que la courbe dont il s'agit offre une représentation de la fonction $F(c, \varphi)$ de Legendre. Plus préoccupé des fonctions $F(c, \varphi)$ et $E(c, \varphi)$ que des fonctions inverses, Werhulst a recherché et découvert une autre courbe, propre à la représentation de la fonction $E(c, \varphi)$; mais il n'a pas remarqué que la courbe du quatrième degré, qui représente la fonction $\varphi = \operatorname{am} u$, fournit également la représentation géométrique des autres fonctions $\cos \operatorname{am} u$, $\sin \operatorname{am} u$ et $\Delta \operatorname{am} u$.

Je crois pouvoir expliquer comment on est resté si longtemps sans découvrir la courbe qui offre la représentation des quatre fonctions elliptiques fondamentales, en faisant remarquer qu'on s'est presque exclusivement attaché à l'une des deux évaluations de l'argument

angulaire que nous offre la considération du cercle. L'une de ces évaluations est fournie par le rapport de l'*arc* au rayon, l'autre par le rapport du double secteur au carré du rayon : la première explique l'usage des dénominations de arc sin, arc tang, ...; la seconde, qui dérive de l'argument considéré sous un point de vue plus général, permet d'écrire, sous une même forme, les angles mesurés dans le cercle et les doubles secteurs mesurés dans l'hyperbole équilatère, puis de comprendre, dans une même représentation géométrique, les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques. Familiarisé depuis longtemps avec l'extension qu'il convenait de donner à la notion de l'argument, en le traitant comme un rapport *aréolaire*, je n'ai eu aucune difficulté à constater que les fonctions elliptiques fondamentales pouvaient être représentées au moyen d'une courbe unique du quatrième degré.

Je ne me bornerai pas à exposer la théorie très-élémentaire qui conduit à ce résultat; je me propose de montrer en même temps comment il est possible de passer logiquement, et par une induction naturelle, des relations entre les fonctions circulaires et leur argument, aux relations qui lient un nombre indéfini de fonctions transcendantes à leurs arguments, en prenant pour point de départ la considération des courbes algébriques et celle des *arguments aréolaires*.

Les courbes algébriques dont nous avons à nous occuper sont les courbes fermées, ayant une branche unique, et symétriques par rapport à deux axes rectangulaires : ces courbes ont, en conséquence, un centre qui est le point d'intersection des deux axes.

Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'un point M d'une telle courbe, r le rayon vecteur de ce point, φ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x, compté positivement vers y, et u l'argument aréolaire qui sera défini dans un instant; nous nous proposons d'établir les relations qui permettent d'exprimer les variables r, φ, x et y en fonctions de u.

Cela posé, dans une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées x, y et les coordonnées polaires r et φ, les relations

$$(1) \qquad \frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{r} = \sin\varphi.$$

Soit S le double du secteur compris entre l'axe des x, le rayon vecteur et la courbe, on a

$$r^2 d\varphi = dS.$$

Si nous prenons pour argument aréolaire le rapport de S au carré du demi-grand axe a parallèle à l'axe des x, nous aurons

$$(2) \qquad u = \frac{S}{a^2};$$

d'où, en vertu de l'équation précédente,

$$du = \frac{r^2}{a^2} d\varphi$$

et

$$(3) \qquad u = \int_0^\varphi \frac{r^2}{a^2} d\varphi.$$

Posons

$$(4) \qquad \frac{a^2}{r^2} = \Delta;$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$(5) \qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta},$$

et Δ sera une fonction de φ, donnée par l'équation de la courbe; u sera ainsi une fonction de φ et, inversement, φ sera une fonction de u, que nous noterons

$$(6) \qquad \varphi = \operatorname{am} u:$$

de cette manière, φ désigne l'amplitude angulaire correspondante à l'argument aréolaire u défini par l'équation (2). Δ, étant une fonction de φ, sera, en vertu de (6), une fonction de u, que l'on désigne le plus souvent par $\Delta \operatorname{am} u$, lorsque l'on suppose Δ exprimé au moyen de $\operatorname{am} u$.

En résumé, nous avons à considérer les fonctions

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi = \operatorname{am} u \quad \text{ou} \quad u = \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta}, \\ \dfrac{x}{r} = \cos\operatorname{am} u, \quad \dfrac{y}{r} = \sin\operatorname{am} u, \quad \dfrac{a^2}{r^2} = \Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Ces relations offrent la représentation géométrique des quatre quantités $\operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\sin \operatorname{am} u$ et $\Delta \operatorname{am} u$.

Il s'agit actuellement de reconnaître quelles sont les courbes algébriques qui satisfont aux conditions spécifiées plus haut.

Ces courbes, étant symétriques par rapport aux axes coordonnés, ne devront contenir que des puissances paires de x et y. Soit $2m$ le degré de leur équation; celle-ci aura la forme

$$(8)\qquad x^{2m} + p x^{2m-2} y^2 + q x^{2m-4} y^4 + \ldots + t y^{2m} + Z = a^{2m},$$

où Z désigne l'ensemble des termes en x et y de degrés inférieurs à $2m$. (Nous justifierons, dans un instant, le choix de la constante qui figure au deuxième membre.)

Pour plus de facilité dans la discussion, nous remplacerons x et y par leurs expressions en coordonnées polaires, tirées de (1); nous aurons ainsi

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{l} r^{2m}(\cos^{2m}\varphi + p \cos^{2m-2}\varphi \sin^2\varphi + q \cos^{2m-4}\varphi \sin^4\varphi + \ldots \\ \qquad + t \sin^{2m}\varphi) + r^{2m-2}\Phi_2 + r^{2m-4}\Phi_4 + \ldots \end{array} \right\} = a^{2m},$$

en désignant par Φ_2, Φ_4, ... des fonctions entières de $\cos^2\varphi$ et $\sin^2\varphi$.

Or, si l'on suppose cette équation résolue par rapport à r^2, on obtiendra, sauf le cas tout particulier des racines égales, m valeurs distinctes de r^2, qui pourront être réelles ou imaginaires, et fourniront autant de branches distinctes; donc nous serons certains de n'avoir qu'une seule branche réelle et de ne point abaisser le degré de la courbe, si nous égalons à zéro les fonctions Φ_2, Φ_4, ..., ou les coefficients des termes de l'équation (8), qui sont de degrés inférieurs à $2m$ et ont fourni ces fonctions. Nous devons ainsi supprimer de ladite équation l'ensemble des termes représentés par Z.

Dans ces conditions, l'équation (8) se réduit à

$$(10)\qquad x^{2m} + p x^{2m-2} y^2 + q x^{2m-4} y^4 + \ldots + t y^{2m} = a^{2m}.$$

Sous cette forme, on voit que la constante a exprime la valeur du demi-axe parallèle aux x.

Si l'on pose

$$(11)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^m = \cos^{2m}\varphi + p \cos^{2m-2}\varphi \sin^2\varphi \\ \qquad + q \cos^{2m-4}\varphi \sin^4\varphi + \ldots + t \sin^{2m}\varphi, \end{array} \right.$$

l'équation (9), suppression faite des termes en $\Phi_2, \Phi_4, \ldots$, donnera

$$(12) \qquad r^{2m}\Delta^m = a^{2m} \quad \text{ou} \quad r^2\Delta = a^2,$$

relations qui s'accordent avec l'équation (4).

La valeur de Δ, tirée de (11), est celle qu'il s'agit d'introduire dans l'intégrale (7), pour obtenir u en fonction de φ ou inversement. L'équation (10) est celle de la courbe représentative des fonctions (7).

Il resterait à exprimer les conditions que doivent remplir les paramètres $p, q, \ldots, t$ pour que la courbe soit une courbe fermée; mais nous allons remplacer ces paramètres par d'autres, qui faciliteront la discussion, et nous donnerons les expressions des premiers en fonctions des seconds : il nous sera facile d'en déduire les conditions relatives à la fermeture de la courbe. Nous remplacerons le développement (11) par un produit de facteurs en nombre m, comme il suit :

$$(13) \quad \Delta^m = (\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi)(\cos^2\varphi + b''^2\sin^2\varphi)\ldots,$$

$b, b', b'', \ldots$ désignant les nouveaux paramètres.

Or la comparaison de cette expression avec le développement (11) permet d'écrire immédiatement les relations

$$(14) \qquad p = \Sigma b^2, \quad q = \Sigma b^2 b'^2, \quad \ldots, \quad t = b^2 b'^2 b'^3, \ldots,$$

en désignant par Σ les sommes des combinaisons 1 à 1, 2 à 2, ..., des nouveaux paramètres $b^2, b'^2, b''^2, \ldots$.

Pour que la courbe soit fermée, il faut que r^2 ne devienne pas infini; donc, en vertu de (12), Δ ne doit pas s'annuler. Or cette condition sera remplie si les paramètres $b, b', b'', \ldots$ sont des quantités réelles, puisque les deux termes de chaque facteur ne peuvent s'annuler simultanément. Il résulte de (14) que les paramètres $p, q, \ldots, t$ doivent tous être positifs.

Soient $c, c', c'', \ldots$ des quantités liées à $b, b', b'', \ldots$ par les relations

$$(15) \qquad c^2 = 1 - b^2, \quad c'^2 = 1 - b'^2, \quad c''^2 = 1 - b''^2, \quad \ldots,$$

la valeur de Δ^m prendra la forme

$$(16)\qquad \Delta^m = (1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)(1 - c''^2 \sin^2\varphi) \ldots,$$

familière aux géomètres.

Enfin, si dans la relation (12)

$$r^{2m} \Delta^m = a^{2m},$$

on met la valeur (13), et que l'on ait égard aux relations (1), on obtiendra cette équation de la courbe considérée

$$(17)\qquad (x^2 + b^2 y^2)(x^2 + b'^2 y^2)(x^2 + b''^2 y^2) \ldots = a^{2m},$$

où le nombre des facteurs binômes du premier membre est égal à m.

Courbes du deuxième ordre. — Faisant $2m = 2$ ou $m = 1$, dans l'équation (17), et écrivant, pour plus de symétrie, A au lieu de a, on aura

$$(18)\qquad (x^2 + b^2 y^2) = \mathrm{A}^2,$$

équation qui est celle d'une ellipse, dont le demi-axe parallèle aux y, étant désigné par B, est lié à b et A par la relation

$$(19)\qquad b = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.$$

La valeur (13) de Δ^m se réduit à

$$(20)\qquad \Delta = \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi,$$

et l'intégrale (5) devient

$$(21)\qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{b} \operatorname{arg}(\operatorname{tang} = b \operatorname{tang}\varphi)$$

On en déduit

$$(22)\qquad b \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} bu,$$

puis

$$1 + b^2 \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2 bu};$$

multipliant par $\cos^2\varphi \cos^2 bu$, et ayant égard à (20), il vient

$$\Delta \cos^2 bu = \cos^2\varphi.$$

Nous extrairons les racines des deux membres de cette équation, en prenant le signe $+$, afin que φ s'annule effectivement avec u; il viendra ainsi

$$\cos\varphi = \sqrt{\Delta}\cos bu.$$

De celle-ci et de (22), on déduit

$$\sin\varphi = \frac{1}{b}\sqrt{\Delta}\sin bu.$$

Si l'on met à la place de $\sqrt{\Delta}$ sa valeur $\frac{A}{r}$, tirée de (4), il vient, en multipliant tout par r et ayant égard à (19),

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} r\sin\varphi &= B\sin\frac{A}{B}u,\\ r\cos\varphi &= A\cos\frac{A}{B}u,\end{aligned}\right.$$

relations qui feront connaître r et φ et tiennent lieu de la relation (22). On déduit de ces expressions, au moyen des formules (1),

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \cos\frac{A}{B}u\,[^*],\\ \frac{y}{B} &= \sin\frac{A}{B}u.\end{aligned}\right.$$

Ces relations présentent la signification géométrique de $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{A}{B}u$.

Considérons le cas du cercle : nous n'avons qu'à faire, dans les équations précédentes, $B = A$, et nous aurons

$$(25)\qquad \varphi = u,\quad \frac{x}{A} = \cos\varphi,\quad \frac{y}{A} = \sin\varphi.$$

---

[*] Ces formules s'obtiennent aisément, sans le secours du Calcul intégral. Circonscrivons à notre ellipse, dont A représente le demi-grand axe, un cercle de rayon A. Prolongeons l'ordonnée d'un point M jusqu'à la rencontre en M_1 avec le cercle, et

Courbes du quatrième ordre. — Soit $2m = 4$ ou $m = 2$, l'équation (17) devient

$$(x^2 + y^2 b^2)(x^2 + y^2 b'^2) = a^4; \tag{26}$$

c'est l'équation de la courbe du quatrième ordre, en coordonnées rectangulaires.

De (16) on tire

$$\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)}. \tag{27}$$

L'intégrale que l'on obtient en introduisant la valeur (27) de Δ dans l'expression de u, équations (7), ou

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)}} \tag{28}$$

est l'équation fondamentale des fonctions abéliennes. On serait donc fondé à donner à la courbe (26) la dénomination de *courbe des fonctions abéliennes*, en ce sens que cette courbe offre la signification géométrique des quatre fonctions qui portent ce nom.

L'équation de la même courbe, en coordonnées polaires, est

$$r^2 = \frac{a^2}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)}}. \tag{29}$$

En attribuant à la constante c' la valeur particulière

$$c' = 0, \tag{30}$$

---

soient y_1 l'ordonnée de M_1, et S_1 le double secteur correspondant : nous aurons

$$\frac{y}{y_1} = \frac{S}{S_1} = \frac{B}{A}.$$

Or on a, dans le cercle,

$$x = A \cos \frac{S_1}{A^2}, \quad y_1 = A \sin \frac{S_1}{A^2};$$

d'où, en vertu des précédentes relations,

$$\frac{x}{A} = \cos \frac{A}{B} \frac{S}{A^2}, \quad \frac{y}{B} = \sin \frac{A}{B} \frac{S}{A^2}.$$

Celles-ci s'identifient avec (24), en vertu de $u = \dfrac{S}{A^2}$.

la deuxième équation (15) nous donnera $b'^2 = 1$, et la valeur de Δ se réduira à

(31) $$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$

tandis que l'équation (17) deviendra

(31 *bis*) $$(x^2 + y^2)(x^2 + b^2 y^2) = a^4.$$

La valeur (31) de Δ étant mise dans l'intégrale (7), on aura l'équation fondamentale des *fonctions elliptiques*

(32) $$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

La courbe (31 *bis*) peut être appelée *courbe des fonctions elliptiques*, puisqu'elle offre la représentation géométrique des quatre fonctions ainsi désignées.

La même courbe a pour équation polaire

(33) $$r^2 = \frac{a^2}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Courbes des ordres supérieurs. — Il est clair que, si l'on attribue à l'exposant $2m$ les valeurs 6, 8, 10, ..., la formule (16) fournira une suite indéfinie de fonctions Δ, et que l'on obtiendra, au moyen des formules (7), une suite de systèmes correspondants d'expressions de transcendantes d'ordres de plus en plus élevés, dont l'équation fondamentale est

(34) $$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[m]{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)(1 - c'^2 \sin^2 \varphi)(1 - c''^2 \sin \varphi) \ldots}}$$

ou

(35) $$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^m = (1 - c^2 \sin^2 \varphi)(1 - c'^2 \sin^2 \varphi)(1 - c''^2 \sin^2 \varphi) \ldots$$

(le nombre des facteurs binômes étant m, ou moindre que m); ces systèmes jouiront de la propriété commune d'être représentés géométriquement par la courbe algébrique (17)

(36) $$(x^2 + b^2 y^2)(x^2 + b'^2 y^2)(x^2 + b''^2 y^2) \ldots = a^{2m},$$

dont les paramètres b^2, b'^2, b''^2, ... sont liés aux constantes c^2, c'^2, c''^2, ... par les relations (15).

La considération des courbes de la forme (36) offre un mode de classement des transcendantes (34) qui n'est pas sans intérêt. Ce classement exclut les intégrales de la forme (34), dans lesquelles on introduirait, sous le radical, un nombre de facteurs binômes, supérieur au degré de ce radical.

Nous terminerons cet exposé en faisant voir comment il est facile de mettre en évidence, dans la théorie des *fonctions elliptiques*, les valeurs imaginaires de la fonction u.

Lorsqu'on veut étudier une fonction de deux variables liées entre elles, il convient de prendre tour à tour chacune d'elles pour variable indépendante. La quantité u, quand on y remplace Δ par sa valeur (31), est une fonction de φ, considéré comme variable indépendante; exprimons maintenant u en fonction de Δ et $d\Delta$: on a les relations

$$\Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi,$$

$$\Delta\, d\Delta = -c^2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$c^2\sin^2\varphi = 1 - \Delta^2,$$

$$c^2\cos^2\varphi = \Delta^2 - b^2;$$

d'où

$$c^2\sin\varphi\cos\varphi = \pm\sqrt{(\Delta^2 - b^2)(1 - \Delta^2)}$$

et

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \mp\frac{d\Delta}{\sqrt{(\Delta^2 - b^2)(1 - \Delta^2)}}.$$

En vertu de cette relation, et observant que Δ décroît quand φ augmente à partir de zéro, la deuxième équation (7) donne

$$u = -\int_1^{\Delta}\frac{d\Delta}{\sqrt{(\Delta^2 - b^2)(1 - \Delta^2)}} = \int_{\Delta}^{1}\frac{d\Delta}{\sqrt{(\Delta^2 - b^2)(1 - \Delta^2)}}.$$

La valeur de u n'est réelle que pour les valeurs de Δ^2 comprises entre b^2 et $+1$; hors de ces limites, elle devient imaginaire. La substitution de la variable Δ à la variable φ aurait donc suffi pour faire reconnaître l'existence des valeurs imaginaires de la fonction u.

Note sur le contact géométrique des courbes et des surfaces;

PAR M. J. COLLET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

L'objet de cette Note est de donner de l'ordre du contact géométrique de deux lieux, lignes ou surfaces, qui se touchent en un point, une définition unique basée sur une propriété géométrique commune aux différents cas, et de traduire analytiquement cette définition en lui conservant sa complète généralité. Nous suivrons, dans ce but, la voie tracée par Cauchy et M. Hermite.

Supposons deux lieux géométriques, lignes ou surfaces, se touchant en un point, et imaginons qu'une droite variable rencontre constamment les deux lieux en se mouvant suivant une loi quelconque, telle cependant que *la droite ne soit pas tangente à l'un des deux lieux lorsqu'elle passe par leur point commun.* Lorsqu'elle sera infiniment voisine de ce point, elle déterminera, dans les deux lieux, deux points infiniment voisins. Nous montrerons que l'ordre infinitésimal de la distance de ces deux points est indépendant de la loi du mouvement de la droite, et qu'il est l'ordre le plus élevé que l'on puisse obtenir pour la distance de deux points des deux lieux infiniment voisins de leur point commun. *Cet ordre, diminué d'une unité, sera celui du contact géométrique des deux lieux.*

Nous aurons à considérer successivement deux courbes, deux surfaces, une courbe et une surface; et, pour chacun de ces cas, nous donnerons l'expression analytique des conditions d'un contact d'ordre quelconque.

§ I. — *Contact de deux courbes.*

Les propriétés des courbes planes se déduisant facilement de celles des courbes dans l'espace, nous ne nous occuperons que de ces dernières. Soient S et S_1 deux courbes qui se touchent en un point A, AT, leur tangente commune en ce point, et supposons qu'une droite se meuve d'une manière quelconque en s'appuyant sur les deux courbes,



de façon cependant à ne pas se confondre avec AT quand elle passe en A. Si P et P_1 sont les points infiniment voisins de A où cette droite rencontre les courbes quand elle est elle-même à une distance infiniment petite de A, *l'ordre infinitésimal de la distance* PP_1 *sera indépendant de la loi du mouvement de la droite*. En effet, si, dans une autre loi de mouvement, P'_1 est le point où la droite passant en P rencontre la courbe S_1, le triangle infinitésimal $PP_1P'_1$, dans lequel les angles P_1 et P'_1 ne sont pas nuls à la limite, donne, pour le rapport $\frac{PP'_1}{PP_1}$, une limite finie; donc PP_1 et PP'_1 sont du même ordre, si PP_1 et PP'_1 font à la limite des angles finis avec AT.

Si la droite PP'_1 tendait à se confondre avec AT, l'angle P'_1 s'annulant à la limite, PP_1 serait d'un ordre supérieur à celui de PP'_1 ; donc *l'ordre de* PP_1, *quand la direction limite de la droite* PP_1 *diffère de celle de* AT, *est plus élevé que pour toute droite infiniment voisine de* M, *mais ne satisfaisant pas à la condition précédente. Cet ordre, diminué d'une unité, sera l'ordre du contact des deux courbes.*

Cet ordre peut être mesuré par celui de l'angle PAP_1. En effet, les cordes AP et AP_1 sont de même ordre que la distance du point A à la

droite PP_1, puisque les angles APP_1 et AP_1P ne sont pas nuls à la limite; donc, si le contact est d'ordre n, la limite du rapport $\frac{PP_1}{\overline{AP}^{n+1}}$ est finie, et, par suite aussi, celle du rapport $\frac{\sin PAP_1}{\overline{AP}^n \sin AP_1P}$, qui est égal au précédent. Comme $\sin AP_1P$ est fini à la limite, on voit que l'angle PAP_1, comme son sinus, est d'un ordre infinitésimal égal à l'ordre du contact des deux courbes.

Projetons maintenant ces deux courbes sur un plan. Si ce plan n'est pas perpendiculaire à la direction limite de PP_1, la projection de la distance PP_1 sera de même ordre que cette ligne, et les projections des deux courbes auront un contact de même ordre que les courbes dans l'espace, pourvu que la direction limite de la projection de PP_1 soit distincte de la projection de la tangente commune aux deux courbes. Donc l'ordre du contact des courbes en projection ne peut être inférieur à celui des courbes dans l'espace, et il ne leur est supérieur que si la projection de PP_1 est à la limite parallèle à la tangente commune aux projections, ou si le plan de projection est perpendiculaire à la direction limite de la droite PP_1.

Mais si l'on considère les projections sur trois plans qui n'ont qu'un point commun, la seconde circonstance ne peut se présenter que sur l'un des plans de projection, et, la première, que sur l'un des deux autres; donc, *sur l'un au moins des plans de projection, les courbes projetées ont un contact de même ordre que les courbes dans l'espace*, et cet ordre est *le moins élevé* de ceux que donnent les projections sur les trois plans considérés, si toutefois ces ordres ne sont pas tous égaux. D'ailleurs, tout cela s'étend sans peine à des projections obliques, la direction normale à un plan étant remplacée par la direction des projetantes relatives à ce plan.

Il est facile maintenant d'exprimer analytiquement les conditions d'un contact d'ordre n entre deux courbes qui se touchent en un point.

La droite mobile que nous avons considérée établit une correspondance entre les points des deux courbes, et, comme les positions de la droite peuvent être considérées comme ne dépendant que des valeurs attribuées à un seul paramètre t, les coordonnées des points

correspondants seront des fonctions de ce paramètre. On aura donc, pour un point de la première courbe,

$$(1)\qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t),$$

et, pour le point correspondant de la seconde,

$$(2)\qquad x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t), \quad z = \Theta(t).$$

Si les fonctions φ, ψ, θ sont une fois données, la forme des fonctions Φ, Ψ, Θ dépendra de la loi du mouvement de la droite de correspondance, mais de façon cependant que les différents systèmes, tels que

$$(3)\qquad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

obtenus en éliminant t des équations (2), soient équivalents. On aura donc entre les fonctions Φ, Ψ, Θ les relations identiques

$$(4)\qquad F[\Phi(t), \Psi(t), \Theta(t)] = 0, \quad F_1[\Phi(t), \Psi(t), \Theta(t)] = 0.$$

Si les courbes ont, pour une valeur a de t, un point commun, et, en ce point, un contact d'ordre n, les différences $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ répondant à la valeur $a + h$ de t, seront infiniment petites d'ordre $n + 1$ par rapport à h, ce qui exige que les $3(n + 1)$ conditions suivantes soient satisfaites :

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \varphi\;(a) = \Phi\;(a), & \psi\;(a) = \Psi\;(a), & \theta\;(a) = \Theta\;(a), \\ \varphi'(a) = \Phi'(a), & \psi'(a) = \Psi'(a), & \theta'(a) = \Theta'(a), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ \varphi^{(n)}(a) = \Phi^{(n)}(a), & \psi^{(n)}(a) = \Psi^{(n)}(a), & \theta^{(n)}(a) = \Theta^{(n)}(a), \end{array} \right.$$

une ou deux de ces suites pouvant d'ailleurs se prolonger au delà.

Ces conditions, *nécessaires* et *suffisantes* pour une loi de correspondance donnée, dépendent de cette loi. Pour obtenir des conditions n'en présentant pas de traces, il faut donc éliminer les fonctions Φ, Ψ, Θ et leurs dérivées entre les identités (4) et les équations (5).

Si l'on prend pour cela, jusqu'à celles de l'ordre n, les dérivées successives des identités (4), qu'on y fasse $t = a$, ainsi que dans les identités (4), et qu'on élimine alors les quantités $\Phi(a)$, $\Psi(a)$, $\Theta(a)$, $\Phi'(a)$, ..., $\Theta^{(n)}(a)$, au moyen des équations (5), on aura $2(n+1)$, égalités qui seront indépendantes des fonctions Φ, Ψ, Θ, et qui seront des *conditions nécessaires* pour un contact d'ordre n entre les deux courbes. Ces conditions peuvent s'écrire très-simplement en remarquant que leurs premiers membres sont identiques respectivement à ce que deviennent les fonctions

$$(6)\quad f(t) = \mathrm{F}[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)], \quad f_1(t) = \mathrm{F}_1[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)]$$

et leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre n inclusivement quand on y fait $t = a$. Donc, les deux courbes étant données par les équations (1) et (3), si l'on forme les fonctions $f(t)$ et $f_1(t)$ d'après les formules (6), on aura, sous la forme que leur a donnée M. Hermite, pour un contact d'ordre n, répondant à la valeur a du paramètre t, les $2(n+1)$ *conditions nécessaires* suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} f(a) = 0, & f'(a) = 0, & \ldots, & f^{(n)}(a) = 0, \\ f_1(a) = 0, & f_1'(a) = 0, & \ldots, & f_1^{(n)}(a) = 0. \end{cases}$$

Ces conditions sont *suffisantes*, c'est-à-dire que, formant les suites (7), l'ordre du contact est celui des dérivées de même ordre de $f(t)$ et de $f_1(t)$ qui, les dernières, s'annulent simultanément quand on y fait $t = a$. Il suffit de prouver que, pour un contact d'ordre n, on ne peut avoir

$$f^{(n+1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f_1^{(n+1)}(a) = 0.$$

En effet, si ces égalités avaient lieu, en les supposant développées, et en en retranchant les identités obtenues en prenant les dérivées d'ordre $(n+1)$ des identités (4), après réductions au moyen des relations (5), on aurait

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \Phi}\left[\varphi_{(a)}^{(n+1)} - \Phi_{(a)}^{(n+1)}\right] + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \Psi}\left[\psi_{(a)}^{(n+1)} - \Psi_{(a)}^{(n+1)}\right] + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \Theta}\left[\theta_{(a)}^{(n+1)} - \Theta_{(a)}^{(n+1)}\right] = 0.$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial \Phi}\left[\varphi_{(a)}^{(n+1)} - \Phi_{(a)}^{(n+1)}\right] + \ldots = 0.$$

Mais, comme les différences $[\varphi_a^{(n+1)} - \Phi_a^{n+1}]$, ... sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la direction limite de la droite qui joint les deux points correspondants, on voit que les égalités précédentes ne peuvent être satisfaites qu'autant que cette droite est à la limite tangente aux courbes considérées, ce qui n'a pas lieu par hypothèse; donc les deux suites (7) ne peuvent se prolonger ensemble au delà dans le cas d'un contact d'ordre n et expriment bien les *conditions nécessaires et suffisantes* d'un contact de cet ordre.

Ces conditions expriment que les deux courbes peuvent être considérées comme ayant à leur point de contact $(n+1)$ points communs confondus.

En effet, les valeurs de t qui déterminent des points communs aux deux courbes sont les solutions communes aux deux équations $f(t)=0$, $f_1(t)=0$; et le degré de multiplicité de chaque racine commune donne le nombre de points communs confondus correspondants. Or, dans le cas d'un contact d'ordre n, pour $t=a$, les conditions (7) montrent que cette valeur a de t est une racine commune d'ordre $(n+1)$, ce qui démontre la proposition énoncée.

La démonstration des conditions (7) pouvait être faite de la manière suivante, sans faire intervenir le mode particulier de correspondance établi entre les points.

Dans les fonctions $F(X, Y, Z)$ et $F_1(X, Y, Z)$ qui sont nulles quand les variables sont remplacées par les coordonnées d'un point de la courbe S_1 introduisons, pour X, Y, Z, les coordonnées x, y, z du point correspondant de la courbe S, et développant nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} F(x,y,z) = \dfrac{x-X}{1}\dfrac{\partial F}{\partial X} + \dfrac{y-Y}{1}\dfrac{\partial F}{\partial Y} + \dfrac{z-Z}{1}\dfrac{\partial F}{\partial Z} + \dfrac{(x-X)^2}{1.2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2}\cdots, \\ F_1(x,y,z) = \dfrac{x-X}{1}\dfrac{\partial F_1}{\partial X} + \cdots. \end{cases}$$

En remplaçant dans les seconds membres x, y, z, X, Y, Z en fonction de t ou de $a+h$, on pourrait, en développant tous les termes, les ordonner suivant les puissances ascendantes de h, et les résultats seraient identiques à ceux que donneraient les mêmes fonctions $F(x,y,z)$, $F_1(x,y,z)$ si l'on y remplaçait préalablement x, y, z par leurs valeurs

en fonction de $(a+h)$, et si l'on développait les résultats obtenus qui ne seraient autres que $f(a+h)$ et $f_1(a+h)$. Mais, si l'on suppose que les deux courbes aient un point répondant à $t=a$, un contact d'ordre n, les développements (8) ne contiendront que des termes d'ordre égal ou supérieur à $(n+1)$; donc il en devra être de même des développements de $f(a+h)$ et de $f_1(a+h)$, ce qui exige que les conditions (7) soient satisfaites. Ces conditions sont donc *nécessaires*.

Elles sont *suffisantes*, car, si l'on appelle α, β, γ les coefficients de h^{n+1} respectivement dans les développements de $(x-\mathrm{X})$, $(y-\mathrm{Y})$, $(z-\mathrm{Z})$, et que l'on représente par $\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}}\right)_a$, $\left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{X}}\right)_a$, $\cdots$ ce que deviennent les dérivées partielles de F et de F_1 quand on y fait $t=a$, les premiers termes des développements (8) sont les suivants :

$$h^{n+1}\left[\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}}\right)_a+\beta\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Y}}\right)_a+\gamma\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right)_a\right],$$
$$h^{n+1}\left[\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{X}}\right)_a+\cdots\right],$$

et ces termes ne peuvent s'annuler tous deux, α, β, γ n'étant pas nuls tous trois, sans que la droite qui joint les points correspondants ne soit à la limite tangente à la courbe S_1, ce qui n'a pas lieu. Donc aussi les quantités $f^{(n+1)}(a)$ et $f_1^{(n+1)}(a)$ ne peuvent toutes deux s'annuler, et les conditions (7) sont bien suffisantes.

De la démonstration précédente il résulte aussi que deux courbes qui ont en un point un contact d'ordre n peuvent être considérées comme ayant en ce point $(n+1)$ points communs confondus.

Enfin nous ferons remarquer que, si l'on suppose que la variable t soit une coordonnée, z par exemple, et, en outre, que $\Theta(z)=z$, ce qui sera possible toutes les fois que la tangente commune ne sera pas parallèle au plan xOy des coordonnées, les courbes seront alors définies par les deux systèmes

$$x=\varphi(z),\quad y=\psi(z),$$
$$\mathrm{X}=\Phi(z),\quad \mathrm{Y}=\Psi(z),\quad \mathrm{Z}=z;$$

et si pour $z=a$ les deux courbes ont un contact d'ordre n, on devra

avoir

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= \Phi(\alpha), & \psi(\alpha) &= \Psi(\alpha),\\
\varphi'(\alpha) &= \Phi'(\alpha), & \psi'(\alpha) &= \Psi'(\alpha),\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots, & \ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
\varphi^{(n)}(a) &= \Phi^{(n)}(a), & \psi^{(n)}(a) &= \Psi^{(n)}(\alpha),
\end{aligned}$$

conditions qui sont au nombre de $2(n+1)$, bien que le mode de correspondance des points soit explicité. Mais cette exception à la règle générale n'est qu'apparente, car $(n+1)$ des conditions (5) sont ici identiquement satisfaites.

II. — *Contact de deux surfaces.*

Si deux surfaces Σ, Σ_1, tangentes en A, sont rencontrées en deux points P, P_1 par une droite mobile qui n'est assujettie qu'à la condition de ne pas être tangente aux surfaces quand elle passe par leur point de contact, on prouverait, comme pour deux courbes, que, lorsque la droite est infiniment voisine du point A, la distance PP_1 est d'un ordre infinitésimal invariable, quelle que soit la loi du mouvement de la droite, et que cet ordre est plus élevé que pour toute droite dont le mouvement ne satisferait pas à la condition posée. *Cet ordre diminué d'une unité sera l'ordre de contact des deux surfaces.*

La définition précédente suppose que la droite mobile rencontre effectivement les surfaces en deux points distincts, c'est-à-dire qu'elle ne rencontre pas l'une des branches du point multiple que l'intersection des deux surfaces présente à leur point de contact.

Remarquons que les lieux décrits par P et P_1 sur les deux surfaces sont des courbes ayant en A un contact du même ordre que celui des surfaces, et qu'une surface quelconque passant en A, sans être tangente aux surfaces précédentes, les coupera suivant deux courbes dont le contact sera encore de cet ordre. Mais, si la dernière surface touchait les précédentes en A, les deux courbes obtenues ne présenteraient plus qu'un contact d'ordre inférieur à celui des deux surfaces; car il serait alors impossible de faire glisser sur ces courbes une droite qui ne serait pas tangente aux surfaces proposées quand elle passerait par leur

point de contact; l'ordre du contact des courbes ainsi obtenues sera ultérieurement déterminé.

Cherchons actuellement l'expression analytique des conditions d'un contact d'ordre n entre les deux surfaces.

Les positions de la droite mobile dépendant ici des valeurs attribuées à deux paramètres u, v, les coordonnées des points correspondants qu'elle détermine sur les deux surfaces seront des fonctions de ces paramètres. On aura ainsi, pour un point de la première surface,

$$(9)\qquad x=\varphi(u,v),\quad y=\Psi(u,v),\quad z=\theta(u,v),$$

et, pour le point correspondant de la seconde,

$$(10)\qquad X=\Phi(u,v),\quad Y=\Psi(u,v),\quad Z=\Theta(u,v),$$

les fonctions Φ, Ψ, Θ, quand les fonctions φ, Ψ, θ sont données, dépendant de la loi de correspondance des points, mais cependant de façon que, par l'élimination des paramètres u, v, les équations (10) conduisent toujours à une même équation

$$(11)\qquad F(X,Y,Z)=0,$$

qui est celle de la deuxième surface. Les fonctions Φ, Ψ, Θ, devront donc satisfaire à la relation identique

$$(12)\qquad F[\Phi(u,v),\ \Psi(u,v),\ \Theta(u,v)]=0.$$

En exprimant que, pour $u=a$, $v=b$, les deux surfaces ont un point commun, et que, pour $u=a+h$, $v=b+k$, quels que soient h et k, considérés comme du premier ordre, les différences $x-X$, $y-Y$, $z-Z$ sont d'ordre $(n+1)$, on aura trois groupes de conditions analogues au suivant :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\varphi(a,b)=\Phi(a,b),\\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial a},\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial b},\\
\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial a^2},\quad \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial b}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial b},\quad \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial b^n}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial^2 b},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial a^n}=\dfrac{\partial^n\Phi}{\partial a^n},\quad \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial a^n}=\dfrac{\partial^n\Phi}{\partial a^{n-1}\partial b},\quad\ldots,\quad \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial b^n}=\dfrac{\partial^n\Phi}{\partial b^n},
\end{array}\right.$$

les deux autres groupes se déduisant du précédent en substituant successivement ψ et Ψ, θ et Θ à φ et Φ. Le nombre des conditions ainsi obtenues sera $\frac{3(n+1)(n+2)}{2}$; elles dépendront du mode particulier de correspondance entre les points, et, pour obtenir des conditions qui en soient indépendantes, on procédera comme dans le cas de deux courbes. On éliminera, au moyen des égalités (13) et de leurs analogues non écrites, les quantités $\Phi(\alpha, b)$, $\Psi(a, b)$, $\Theta(\alpha, b)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial a}, \dots, \frac{\partial^n\Theta}{\partial b^n}$ de l'identité (12) et de celles qu'on en déduit en prenant ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n par rapport aux variables u et v, ces dernières étant ultérieurement remplacées partout par a et b. Les premiers membres des équations obtenues seront identiques à ce que devient la fonction

$$f(u, v) = \mathrm{F}[\varphi(u, v), \Psi(u, v), \theta(u, v)], \tag{14}$$

et ses dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre n quand on y fait $u = a$, $v = b$. On obtiendra donc les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *conditions nécessaires* suivantes :

$$f(a, b) = 0,$$

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 b} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial^n f}{\partial a^n} = 0, \quad \frac{\partial^n f}{\partial a^{n-1}\partial b} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial b^n} = 0, \end{cases}$$

conditions qu'on pourrait encore établir sans faire intervenir explicitement le mode de correspondance des points.

Pour prouver que les conditions (15) sont *suffisantes*, nous ferons voir que, dans le cas d'un contact d'ordre n, les $n+1$ dérivées partielles $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^{n+1}}, \frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^n db}, \cdots$ ne peuvent être simultanément nulles.

Coupons pour cela les surfaces considérées par une nouvelle surface qui passe par leur point de contact sans leur être tangente; les courbes obtenues présenteront en ce point un contact d'ordre n. En établissant

entre u et v une relation convenable par laquelle v sera une fonction de u, $v = \lambda(u)$, et v' sa dérivée, les équations (9) pourront encore définir la courbe obtenue sur la première surface. Mais, si la nouvelle surface a pour équation $F_1(X, Y, Z) = 0$, et si l'on pose

$$f_1(u, v) = F_1[\varphi(u, v),\quad \psi(u, v),\quad \theta(u, v)],$$

on sait que, si les deux courbes considérées n'ont un contact que de l'ordre n, les dérivées totales d'ordre $n+1$ des fonctions f et f_1 dans lesquelles on considère v comme une fonction de u ne peuvent s'annuler simultanément pour $n = a$, $v = \lambda(a) = b$. Mais, comme on peut d'une infinité de manières choisir la forme de la fonction F_1 de façon que sa dérivée d'ordre $n+1$ s'annule pour $u = a$, $v = b$, il en résulte que la dérivée de cet ordre de la fonction f ne peut être nulle. Comme, au contraire, les dérivées d'ordre inférieur s'annulent toutes alors, on devra avoir enfin, pour $u = a$ et $v = b$,

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^{n+1}} + (n+1)v' \frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^n \partial b} + \ldots + v'^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial b^{n+1}} \gtrless 0,$$

ce qui prouve bien que, dans le cas d'un contact d'ordre n entre les deux surfaces, les dérivées partielles d'ordre $(n+1)$ de la fonction $f(u, v)$ ne peuvent toutes s'annuler pour les valeurs a et b de u et v qui répondent au point de contact, et les conditions (15) sont bien suffisantes.

Dans les applications on prendra ordinairement pour les paramètres u, v deux des coordonnées relatives à un point de l'une des surfaces, par exemple x et y, si le plan tangent commun n'est pas parallèle à oz, et les équations des deux surfaces deviendront

$$z = \varphi(x, y),$$
$$X = x,\quad Y = y,\quad Z = \Phi(x, y);$$

alors deux des trois groupes (12) de conditions seront identiquement satisfaites; et, bien que le mode de correspondance des points soit explicité, on n'aura plus ici que $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions pour un contact d'ordre n.

Nous avons vu que l'ordre du contact de deux courbes pouvait se caractériser par le nombre des points confondus communs aux deux

courbes. Il existe une propriété analogue pour les surfaces. *Quand deux surfaces ont en un point un contact d'ordre n, leur intersection présente en ce point un point multiple d'ordre $n+1$.*

Soient

$$(16) \qquad z - f(x, y) = 0, \quad z - F(x, y) = 0$$

les équations de deux surfaces, les coordonnées x, y d'un point de leur intersection seront données en fonction de z par le système de ces deux équations ; et si l'on forme les dérivées successives de ces équations jusqu'à l'ordre p inclusivement, les $2p$ équations obtenues, jointes aux précédentes, donneront pour chacune des dérivées de x et de y, jusqu'à l'ordre p, une valeur unique et bien déterminée, en fonction de z, si les valeurs correspondantes de x et de y n'annulent pas le déterminant fonctionnel

$$(17) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

En effet, dans les calculs successifs, les dérivées d'ordre k des équations (16) font les premières apparaître les dérivées de cet ordre de x et de y, et cela dans les groupes linéaires suivants :

$$\frac{\partial f}{\partial x}x^{(k)} + \frac{\partial f}{\partial y}y^{(k)}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}x^{(k)} + \frac{\partial F}{\partial y}y^{(k)},$$

de sorte qu'en supposant déterminées les dérivées d'ordre inférieur à k, les dérivées d'ordre k des équations (16) donneront bien pour $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ un système unique de solutions, pourvu que l'expression (17) ne soit pas nulle, et cela aura lieu pour toutes les dérivées successives, de $k=1$ à $k=p$.

Mais, si les surfaces se touchent en un point, pour ce point l'expression (17) est nulle, le raisonnement précédent tombe en défaut, et, si n est l'ordre du contact, les n premières équations dérivées de chacune des équations (16) seront chacune à chacune identiques pour le point considéré. Prenant les dérivées d'ordre $n+1$, elles ne différeront que par les termes renfermant les dérivées d'ordre $n+1$ des fonctions f et F, et, en les retranchant, on aura l'équation suivante :

$$(18) \quad x'^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} - \frac{\partial^{n+1} F}{\partial x^{n+1}}\right) + (n+1)x'^{n}y'\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n}\partial y} - \frac{\partial^{n+1} F}{\partial x^{n}\partial y}\right) + \ldots = 0,$$

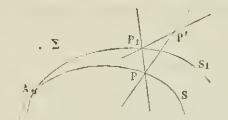
qui, jointe à l'une des suivantes qui sont équivalentes :

$$1 = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y', \quad 1 = \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y',$$

fournira $n+1$ systèmes de valeurs de x' et de y' pour le point de contact des deux surfaces; donc leur intersection présente bien en ce point un point multiple d'ordre $n+1$.

§ III — *Contact d'une courbe et d'une surface.*

Considérons une courbe S et une surface Σ qui se touchent en un point A, et imaginons une droite mobile qui rencontre constamment la courbe et soit assujettie à la condition de ne pas être tangente à la surface quand elle passe par le point de contact de la surface et de la



courbe. Si P_1 est le point où la surface est percée par la droite quand elle passe au point P de la courbe S, infiniment voisin de A, l'ordre infinitésimal de PP_1 sera indépendant de la loi du mouvement de la droite, pourvu que la restriction posée, relativement à cette loi, soit observée.

En effet, si une autre droite passant par P rencontrait la surface Σ en P', les deux droites PP_1 et PP', quand P tend vers A, n'étant pas à la limite tangentes à la surface, ce qui a lieu au contraire pour la droite P_1P', les angles P_1 et P' du triangle PP_1P' tendront vers des limites déterminées, et, par suite, l'ordre infinitésimal des deux longueurs PP_1 et PP' est le même. Si, au contraire, la droite PP' pouvait à la limite devenir tangente, l'angle P' tendrait vers zéro; car, dans le cas contraire, le plan $PP'P_1$ serait à la limite un plan déterminé, tan-

gent à la surface en A, et la droite PP_1 serait aussi à la limite tangente à la surface, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc alors PP_1 est certainement d'ordre supérieur à PP'.

Donc, en assujettissant le mouvement de la droite à la condition posée, quand la droite est infiniment voisine de A, l'ordre de PP_1, qui est constant quand on modifie la loi du mouvement, est aussi le plus élevé que l'on puisse obtenir pour la distance d'un point de S infiniment voisin de A à un point de la surface.

Cet ordre, diminué d'une unité, est l'ordre du contact de la courbe et de la surface.

Le lieu du point P_1 sur la surface est une courbe S_1 qui a, avec la courbe S, un contact du même ordre que la surface. Il en serait ainsi des diverses courbes obtenues en modifiant la loi du mouvement de la droite; et il n'y a pas sur la surface Σ de courbe ayant avec la courbe S un contact d'ordre plus élevé, mais une infinité ayant avec S un contact de cet ordre ou d'ordre inférieur.

L'ordre du contact d'une courbe et d'une surface est donc l'ordre le plus élevé possible du contact de cette courbe et d'une courbe tracée sur la surface.

Pour déterminer sur la surface une courbe qui ait avec la proposée un contact de l'ordre le plus élevé possible, on la coupera par une surface quelconque non tangente en A et passant par la courbe S. En particulier, cette nouvelle surface pourrait être la surface réglée ayant pour directrice la courbe S et pour génératrice une droite normale à la surface en un point infiniment voisin de A quand la droite est elle-même infiniment voisine de ce point.

Cherchons maintenant l'expression analytique des conditions d'un contact d'ordre n entre une courbe et une surface.

Une loi de mouvement étant choisie pour la droite, les coordonnées des points correspondants qu'elle détermine sur la courbe et sur la surface seront des fonctions d'un seul paramètre, t par exemple. On obtiendrait les conditions d'un contact d'ordre n en exprimant que les projections sur les axes de coordonnées de la distance de deux points correspondants infiniment voisins du point commun est d'ordre $n+1$. Mais il est plus simple d'exprimer qu'il y a un contact d'ordre n entre la courbe proposée et celle qu'on obtiendrait en coupant la surface par

une deuxième surface passant par la courbe et ne touchant pas la première à son point de contact avec la courbe.

Soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t)$$

les équations de la courbe S,

$$F(X, Y, Z) = 0$$

celle de la surface Σ, et supposons que, pour $t = a$, on ait un point A commun à la courbe et à la surface.

Soit encore

$$F_1(X, Y, Z) = 0$$

l'équation d'une surface Σ_1 passant par la courbe S. Si l'on pose

$$f(t) = F[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)], \quad f_1(t) = F_1[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)],$$

les conditions d'un contact d'ordre n entre la courbe S et l'intersection des deux surfaces Σ, Σ_1 seront données par les deux suites (7) des $n+1$ égalités. Mais la deuxième suite ne contient que des identités, puisque la courbe Σ_1 contient la courbe S, et que, par suite, pour toute valeur de t, on doit avoir $f_1(t) = 0$; donc, pour les conditions d'un contact d'ordre n entre la courbe et la surface, on a les $n+1$ conditions

$$(19) \qquad f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \ldots, \quad f^n(a) = 0,$$

qui sont complétement indépendantes de la loi de correspondance entre les points. Ces conditions sont *nécessaires et suffisantes*.

Elles expriment que *la courbe et la surface ont au point de contact* $(n+1)$ *points communs confondus*.

Dans les applications, on pourra supposer que les points correspondants de la courbe et de la surface sont déterminés par des parallèles à un axe de coordonnées non parallèle au plan tangent à la surface au point commun avec la courbe, soit oz par exemple. Les équations de la courbe étant alors

$$z = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

et celle de la surface

$$Z = F(x, y),$$

si, pour $x = a$, la différence $z - Z$ doit être d'ordre $n + 1$, en posant

$$f(x) = F[x, \varphi(x)],$$

il faudra que l'on ait

$$(20) \qquad \begin{cases} \varphi(a) = f(a), \\ \varphi'(a) = f'(a), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \varphi^n(a) = f^n(a), \end{cases}$$

conditions qui ne sont qu'au nombre de $(n + 1)$, bien que le mode de correspondance des points soit explicité.

IV. — *Quelques conséquences.*

Parmi les conséquences de la théorie qui précède, nous en indiquerons quelques-unes qui s'en déduisent immédiatement.

Si différentes courbes ont avec une autre courbe, en un point, un contact d'ordre n, elles ont entre elles, en ce point, un contact de cet ordre au moins. Si cet ordre est supérieur au premier, elles admettent, en ce point, même plan osculateur et même courbure, et, s'il est supérieur au second, leur torsion est la même.

De même, si différentes surfaces ont en un point un contact d'ordre supérieur au premier, en ce point elles admettent la même indicatrice, et par suite aussi, d'après le théorème de Meusnier, toute section plane, passant par ce point, déterminera dans les surfaces des courbes ayant même courbure. Si le point considéré est un ombilic sur l'une des surfaces, il en sera un sur toutes les autres.

Quand l'équation générale d'une famille de courbes renferme p paramètres, on peut les déterminer en totalité ou en partie, par la condition que les courbes représentées par l'équation admettent avec une courbe donnée, en l'un quelconque de ses points, un contact d'ordre n. Le problème sera possible, pour les courbes dans l'espace, si l'on a $n \leq \frac{p}{2} - 1$, et l'ordre du plus grand contact possible sera le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{p}{2} - 1$. Dans le cas où le contact

est de l'ordre le plus élevé possible pour l'un quelconque des points de la courbe proposée, les courbes obtenues sont dites *osculatrices* de la première. Elles seront complétement déterminées quand p sera pair, tandis qu'il y en aura une infinité pour p impair, puisqu'un paramètre restera alors indéterminé. Ajoutons qu'en des points en nombre fini les courbes osculatrices admettront un contact d'ordre plus élevé.

Pour une courbe et une surface, l'un des deux lieux étant donné, si l'équation générale de l'autre renferme p paramètres, on pourra les déterminer par la condition qu'il y ait entre les deux lieux un contact d'ordre $p-1$. C'est ainsi qu'en chaque point d'une courbe il existe une sphère osculatrice ayant avec la courbe un contact du troisième ordre.

Des considérations analogues s'appliquent aux surfaces. Si p est le nombre des paramètres indépendants contenus dans l'équation générale d'une famille de surfaces, pour obtenir un contact d'ordre n avec une surface donnée, en l'un quelconque de ses points, il faudra que l'on ait

$$p \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

le cas de l'égalité répondant aux surfaces osculatrices déterminées. Par exemple, si la surface cherchée est algébrique d'ordre m, les ordres possibles de contact, pour un point quelconque, sont définis par la condition

$$(21) \qquad \frac{(n+1)(n+2)}{2} \leq \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1,$$

et, pour le cas de l'égalité, la surface osculatrice, unique alors, est complétement déterminée. Pour $m=5$, $n=9$ est une solution de l'égalité, et il n'y a pas de solution entière pour $m<5$. Donc, en tout point d'une surface, on peut déterminer une surface osculatrice déterminée du cinquième ordre, l'ordre du contact étant alors égal à 9.

Pour $m=2$, $p=9$, la plus grande valeur de n satisfaisant à la condition (21) est 2. Les surfaces osculatrices du second ordre peuvent alors être assujetties à trois conditions distinctes de celles relatives au contact. On peut aussi chercher les points d'une surface pour lesquels il existe une surface du second ordre ayant avec la proposée un contact du troisième ordre. Puisqu'on a neuf paramètres à déterminer et dix conditions à satisfaire, on devrait trouver une courbe pour le lieu

des points cherchés. Mais cela n'a pas réellement lieu, car il arrive que des dix équations de condition on peut en déduire deux qui sont complétement indépendantes des paramètres inconnus, et, par suite, il n'y a sur la surface proposée qu'un nombre limité de points pour lesquels on puisse avoir un contact du troisième ordre avec une surface du second degré. Mais, en revanche, pour chacun de ces points, on a une infinité de surfaces passant par l'intersection de deux quelconques d'entre elles, et toute surface du second degré passant par l'intersection de deux des surfaces précédentes aura un contact du troisième ordre avec la proposée.

Cette réciproque n'est qu'un cas particulier du théorème général qui suit : *Si deux surfaces* S *et* S_1 *ont en un point, avec une surface* Σ, *un contact d'ordre* n, *toute surface passant par l'intersection des deux premières aura avec* Σ *un contact du même ordre.*

Soient

$$z = F(x,y), \quad z = F_1(x,y) \tag{22}$$

les équations des surfaces S, S_1 qui, pour $x = a, y = b$, ont un contact d'ordre n avec la surface

$$z = \varphi(x,y), \tag{23}$$

on aura

$$\varphi(a,b) = F(a,b) = F_1(a,b),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F_1}{\partial a}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial F_1}{\partial b},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial^n\varphi}{\partial a^n} = \frac{\partial^n F}{\partial a^n} = \frac{\partial^n F_1}{\partial a^n}, \quad \frac{\partial^n\varphi}{\partial a^{n-1}\partial b} = \frac{\partial^n F}{\partial a^{n-1}\partial b} = \frac{\partial^n F_1}{\partial a^{n-1}\partial b}, \dots$$

Si alors

$$z = f(x,y) \tag{24}$$

est l'équation générale des surfaces passant par l'intersection des surfaces (22), on pourra poser

$$f(x,y) = \frac{1}{1+\lambda}[F(x,y) + \lambda F_1(x,y)],$$

λ étant un paramètre arbitraire, et comme, pour $p+q \leq n$, on aura

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial a^p \partial b^q} = \frac{1}{1+\lambda}\left[\frac{\partial^{p+q} F}{\partial a^p \partial b^q} + \lambda \frac{\partial^{p+q} F_1}{\partial a^p \partial b^q}\right] = \frac{\partial^{p+q} F}{\partial a^p \partial b^q},$$

on voit que les conditions d'un contact d'ordre n entre la surface (24) et la surface (23) seront satisfaites.

Si les deux surfaces S et S_1 n'avaient pas avec la surface Σ un contact du même ordre, la surface passant par l'intersection des deux premières n'aurait avec Σ qu'un contact d'ordre égal au plus petit des deux précédents.

De ce qui précède on déduit le corollaire suivant :

Toute surface qui passe par l'intersection de deux surfaces présentant en un point un contact d'ordre n admet avec chacune des précédentes un contact au moins de cet ordre.

Pour terminer, nous démontrerons la proposition suivante, qui complétera ce qu'on a dit sur le contact de deux surfaces :

Si les deux surfaces S *et* S_1 *ont en un point un contact d'ordre m, toute surface Σ, qui a avec les précédentes au même point un contact d'ordre n inférieur à m, les coupe suivant des courbes ayant entre elles au point considéré un contact d'ordre $m-n$ sur chacune des $n+1$ branches de leur point multiple commun.*

Considérons d'abord les surfaces S et Σ dont les équations sont

$$(25)\qquad f(x,y) - z = 0, \quad \varphi(x,y) - z = 0,$$

et cherchons, pour le point où elles se touchent, les valeurs des dérivées successives $x', x'', \ldots; y', y'', \ldots$ de x et de y définis en fonction de z par les équations précédentes. Pour cela, nous aurons à prendre, par rapport à z, les dérivées successives de ces équations.

Dans la dérivée d'un ordre quelconque p de l'une de ces équations, on pourra réunir en groupes successifs les termes contenant les dérivées partielles de même ordre des fonctions f ou φ; les coefficients du groupe des dérivées d'ordre q renfermeront alors les dérivées de x et de y depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $p-q+1$, les dérivées de cet ordre n'y entrant que linéairement.

Par suite du contact d'ordre n entre les surfaces S et Σ, les n premières équations obtenues de chacune des précédentes seront identiques chacune à chacune. Les équations suivantes, d'après ce qui précède,

ne différeront que par les groupes des dérivées de f ou de φ d'un ordre supérieur à n. En retranchant l'une de l'autre les équations obtenues en prenant les dérivées de même ordre des équations (25), cet ordre étant supérieur à n, on formera des équations qui, jointes à celles de l'un des deux systèmes déduits des équations (25), permettront de calculer les dérivées successives de x et de y, pour le point considéré, et cela comme il suit.

Les équations

$$\frac{df}{dz} - 1 = 0, \quad \frac{d^{n+1}f}{dz^{n+1}} - \frac{d^{n+1}\varphi}{dz^{n+1}} = 0,$$

où le symbole d désigne une différentielle totale, donneront les $(n+1)$ systèmes de valeurs de x' et de y' qui répondent aux $(n+1)$ tangentes au point multiple que présente en leur point de contact l'intersection des deux surfaces S et Σ. Pour chacun des systèmes précédents de valeurs de x' et de y', les équations

$$\frac{d^2f}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^{n+2}f}{dz^{n+2}} - \frac{d^{n+2}\varphi}{dz^{n+2}} = 0,$$

linéaires en x'' et y'', fourniront les valeurs correspondantes de ces dérivées secondes; et, continuant ainsi, le système

$$\frac{d^pf}{dz^p} = 0, \quad \frac{d^{n+p}f}{dz^{n+p}} - \frac{d^{n+p}\varphi}{dz^{n+p}} = 0$$

servira en général à déterminer les dérivées $x^{(p)}, y^{(p)}$.

Si l'on opère de même pour les surfaces S_1 et Σ, l'équation de la première étant

$$f_1(x, y) - z = 0,$$

à cause de l'hypothèse d'un contact d'ordre m supérieur à n entre les surfaces S et S_1, on obtiendra des systèmes respectivement identiques aux précédents, tant que les équations ne renferment pas de dérivées de f ou de f_1 d'ordre supérieur à m; donc, jusqu'à l'ordre p, défini par la condition $n + p = m$, les valeurs des dérivées successives de x et de y seront respectivement les mêmes, pour chaque système de valeurs de x' et de y'.

Donc les deux courbes d'intersection auront un contact d'ordre $m - n$ sur chacune des $n+1$ branches de leur point multiple commun.

Complément à une Étude intitulée « Essai sur la théorie des eaux courantes » (publiée dans les tomes XXIII, XXIV du « Recueil des Savants étrangers »), et à un Mémoire « Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides » (inséré au tome XIII du « Journal de Mathématiques pures et appliquées », 2e série, 1868) ;

Par M. J. BOUSSINESQ.

§ I. — *Du régime graduellement varié dans un écoulement bien régulier ou non tourbillonnant.*

1. Au § XL d'un *Essai sur la théorie des eaux courantes,* publié au t. XXIII du *Recueil des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris, j'ai étudié l'écoulement d'un liquide par filets peu courbes et peu inclinés les uns sur les autres, dans les circonstances ordinaires où le mouvement est tourbillonnant, tumultueux, et où, par suite, le coefficient ε, dit de frottement intérieur, affectant dans les formules des pressions les dérivées partielles des *vitesses moyennes locales,* varie en chaque point avec l'*agitation* qui y règne. Le plus intéressant de ces modes d'écoulement est celui que j'appelle *graduellement varié,* et dans lequel la vitesse moyenne, ainsi que la section normale fluide, ont leurs dérivées secondes, troisièmes, etc., tant par rapport à la coordonnée longitudinale que par rapport au temps, beaucoup moins influentes que leurs dérivées premières ; en sorte qu'on puisse les négliger devant celles-ci, dont on suppose d'ailleurs insensibles les carrés et les produits. Les équations qui le régissent ont une grande importance pratique, parce qu'elles sont simples, et parce qu'elles s'appliquent à l'écoulement, par les tuyaux et par les canaux

découverts, dans la plupart des cas où l'équation du régime uniforme est en défaut, quoique les vitesses continuent presque à y être distribuées aux divers points d'une même section comme elles le seraient dans un écoulement uniforme. Mais lorsque, au contraire, les mouvements sont bien continus, comme il arrive dans des tubes polis et assez étroits, en sorte que les vitesses vraies et les dérivées de ces vitesses se confondent à fort peu près avec leurs moyennes locales respectives, et quand d'ailleurs le fluide mouille son lit ou est immobilisé contre les parois qui le délimitent, un régime graduellement varié diffère toujours fort peu d'un régime uniforme, sous le rapport de la relation existant entre la vitesse moyenne, la pente motrice et le rayon moyen. C'est ce que je démontrerai au n° 5 ci-après. Dans ce cas, la théorie du mouvement graduellement varié est donc plus curieuse pour le géomètre qu'utile à l'ingénieur, et c'est pourquoi je me suis abstenu de l'exposer dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes,* ainsi que dans les *Additions* insérées au tome suivant, XXIV, du *Recueil des Savants étrangers*. Mais on me permettra d'en donner ici un aperçu, comme complément à un précédent Mémoire *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides,* où se trouvent traitées un certain nombre de questions concernant les mouvements bien continus.

2. Je prendrai un système d'axes rectangles des x, y, z tels, que celui des x fasse de très-petits angles avec les vitesses, dont u, v, w désigneront les composantes : ainsi v, w et même la dérivée

$$\frac{du}{dx} = -\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$$

seront partout très-petites. Dans les équations du mouvement, les termes affectés du petit coefficient constant de frottement ε seront insensibles quand ils auront en outre, comme second facteur, soit une dérivée de v, w, soit même une dérivée de u prise une ou plusieurs fois par rapport à x. Les composantes transversales v, w de la vitesse étant d'ailleurs comparables à la dérivée en x de la composante longitudinale u, ou, plus exactement, au produit de cette dérivée par les

dimensions transversales de la masse fluide, les dérivées premières de v, w en x et t se trouveront de l'ordre de petitesse des dérivées secondes de u par rapport à x et à t, dérivées qu'on négligera, ainsi que les carrés et produits de v, w, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dt}$. Par suite, les accélérations *latérales* $v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}$, $w' = \ldots$ seront insensibles, et les deux dernières équations indéfinies du mouvement ne différeront pas de celles qu'on aurait pour un fluide en équilibre, ou signifieront que la pression p varie hydrostatiquement, à l'époque t, d'un point à l'autre d'une même section fluide σ, normale à l'axe des x. Concevons qu'on trace, pour l'époque considérée t, une ligne déterminée, peu inclinée sur l'axe des x, mais d'ailleurs quelconque; et soient p_0 la pression actuelle au point de cette ligne qui a l'abscisse x, I l'inclinaison, sous l'horizon, d'un élément ds de la même ligne, élément compris entre les abscisses x, $x + dx$; enfin ρ la densité du fluide ou ρg son poids par unité de volume. La variation de la pression p_0 le long de l'élément ds serait $\rho g \sin \mathrm{I}\, ds$, si cette pression variait hydrostatiquement d'une section à l'autre, tandis qu'elle vaudra, en réalité, $\frac{dp_0}{ds}ds$: l'excès $\left(\frac{dp_0}{ds} - \rho g \sin \mathrm{I}\right) ds$ représente donc la variation éprouvée, d'une section à l'autre, par la partie non hydrostatique de la pression, et son quotient par dx, c'est-à-dire, sauf erreur négligeable du second ordre de petitesse, l'expression $\frac{dp_0}{ds} - \rho g \sin \mathrm{I}$, ou $\frac{dp_0}{dx} - \rho g \sin \mathrm{I}$, sera, d'après des formules connues dues à Navier, celle qu'il faudra égaler à

$$\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \rho u',$$

ou à

$$\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right),$$

pour avoir la première équation indéfinie du mouvement. Celle-ci, divisée par ρg, peut donc s'écrire

$$(1) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \left(\sin \mathrm{I} - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = \frac{u'}{g}.$$

Elle devra être vérifiée en tous les points de la section normale σ, ayant l'abscisse quelconque x. En outre, si m, n désignent les cosinus des angles que fait avec les y et les z la normale à cette section, menée vers le dehors, on aura, sur le contour de σ, les conditions spéciales :

$$(2) \qquad u = 0 \text{ (aux parois)}, \quad m\frac{du}{dy} + n\frac{du}{dz} = 0 \text{ (à la surface libre)}.$$

Ces conditions expriment, la première, l'immobilité du fluide contre les parois; la seconde, l'absence de tout frottement sensible exercé sur le fluide, à la surface libre, par l'atmosphère contiguë.

3. Ces équations se traiteront par la méthode suivie au § XL de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 491), pour le cas de mouvements tourbillonnants. Multiplions d'abord la première, (1), par $dy\,dz$ ou $d\sigma$, et intégrons les résultats dans toute l'étendue de la section fluide σ. Si χ' désigne le contour de σ, $d\chi'$ un élément quelconque de ce contour, $\int_{\chi'}$ une intégrale prise sur toute la longueur du même contour, et aussi, pour abréger,

$$\frac{d}{dN} = m\frac{d}{dy} + n\frac{d}{dz}$$

la dérivée d'une fonction le long d'un élément infiniment petit de la normale à $d\chi'$, un procédé bien connu d'intégration donnera

$$\int_\sigma \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right) d\sigma = \int_{\chi'} \left(m\frac{du}{dy} + n\frac{du}{dz}\right) d\chi' = \int_{\chi'} \frac{du}{dN}\, d\chi'.$$

Mais la deuxième condition spéciale (2) montre que les éléments de cette dernière intégrale, qui sont relatifs à la surface libre, s'annulent, en sorte qu'il suffit d'étendre l'intégrale à tous les éléments $d\chi$ du *contour mouillé* χ. Le résultat total obtenu, divisé par σ, sera donc

$$(3) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho g \sigma}\int_\chi \frac{du}{dN}\, d\chi + \left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = \frac{1}{g}\int_\sigma u' \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

C'est de cette relation (3) que nous tirerons l'équation du mouve-

ment graduellement varié. Retranchons-la de (1), afin d'éliminer de celle-ci la *pente motrice* $\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}$; puis divisons le résultat par la vitesse moyenne U, dont l'expression est

$$U = \int_\sigma u \frac{d\sigma}{\sigma}: \tag{4}$$

il viendra

$$\frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2\frac{u}{U}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{u}{U}}{dz^2} - \frac{\chi}{\sigma}\int_\chi \frac{d\frac{u}{U}}{dN}\frac{d\chi}{\chi}\right) = \frac{1}{gU}\left(u' - \int_\sigma u'\frac{d\sigma}{\sigma}\right). \tag{5}$$

Les conditions (2), spéciales au contour-limite, s'écriront d'ailleurs

$$\frac{u}{U} = 0 \text{ (aux parois)}, \quad \frac{d\frac{u}{U}}{dN} = 0 \text{ (à la surface libre)}. \tag{6}$$

Dans le cas particulier d'un régime uniforme, le rapport $\frac{u}{U}$ est une certaine fonction φ de $\frac{\chi y}{\sigma}$, $\frac{\chi z}{\sigma}$, la même aux points homologues de toutes les sections semblables, et qui se détermine au moyen des équations (5), (6), (4), devenues, pour ce cas où $u' = 0$,

$$\frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{\chi}{\sigma}\int_\chi \frac{d\varphi}{dN}\frac{d\chi}{\chi}\right) = 0, \tag{7}$$

(7 *bis*) $\varphi = 0$ (aux parois), $\frac{d\varphi}{dN} = 0$ (à la surface libre), $\int_\sigma \varphi \frac{d\sigma}{\sigma} = 1$.

Retranchons ces équations (7), (7 *bis*) des équations correspondantes (5), (6), (4), et écrivons, pour abréger,

$$\varpi = \frac{u}{U} - \varphi; \tag{8}$$

nous aurons

$$\frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2} + \frac{d^2\varpi}{dz^2} - \frac{\chi}{\sigma}\int_\chi \frac{d\varpi}{dN}\frac{d\chi}{\chi}\right) = \frac{1}{gU}\left(u' - \int_\sigma u'\frac{d\sigma}{\sigma}\right), \tag{9}$$

(9 *bis*) $\varpi = 0$ (aux parois), $\frac{d\varpi}{dN} = 0$ (à la surface libre), $\int_\sigma \varpi \frac{d\sigma}{\sigma} = 0$.

La fonction $\varpi = \frac{u}{U} - \varphi$, qui s'annulerait pour $u' = 0$, sera de l'ordre de petitesse du second membre de (9), c'est-à-dire de l'ordre de u' ou de celui des petites dérivées $\frac{du}{dt}$, $\frac{du}{dx}$; φ sera donc une première valeur approchée du rapport $\frac{u}{U}$.

4. On obtient une expression remarquable du premier terme de (3), ou du frottement extérieur total $-\varepsilon \int_\chi \frac{du}{dN} d\chi$, en ajoutant la première (7), multipliée par $-\varpi d\sigma$, à la première (9), multipliée par $\varphi d\sigma$, et intégrant dans toute l'étendue de σ. Si l'on observe que

$$\varphi \frac{d^2\varpi}{dy^2} - \varpi \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\varphi \frac{d\varpi}{dy} - \varpi \frac{d\varphi}{dy}\right), \quad \varphi \frac{d^2\varpi}{dz^2} - \varpi \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\varphi \frac{d\varpi}{dz} - \varpi \frac{d\varphi}{dz}\right),$$

les deux premiers termes du résultat, devenus simplement

$$\frac{\varepsilon}{\rho g} \int_{\chi'} \left(\varphi \frac{d\varpi}{dN} - \varpi \frac{d\varphi}{dN}\right) d\chi',$$

s'annuleront à cause des deux premières conditions spéciales (7 *bis*), (9 *bis*); et les dernières de ces conditions spéciales permettront à leur tour de réduire l'équation obtenue à

$$-\frac{\varepsilon}{\rho g} \int_\chi \frac{d\varpi}{dN} d\chi = \frac{\sigma}{gU} \int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Celle-ci, en remplaçant ϖ par $\frac{u}{U} - \varphi$ et multipliant par $\frac{U}{\sigma}$, peut s'écrire

$$-\frac{\varepsilon}{\rho g \sigma} \int_\chi \frac{du}{dN} d\chi = \left[\frac{-\varepsilon}{\rho g} \frac{\sigma}{\chi} \int_\chi \frac{d\varphi}{dN} \frac{d\chi}{\chi}\right] \left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 U + \frac{1}{g} \int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

L'expression $-\frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{\sigma}{\chi} \int_\chi \frac{d\varphi}{dN} \frac{d\chi}{\chi}$ est un certain coefficient, constant pour toutes les sections d'une même forme : nous le désignerons par β. Le résultat trouvé sera donc

$$(10) \qquad -\frac{\varepsilon}{\rho g \sigma} \int_\chi \frac{du}{dN} d\chi = \beta \left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 U + \frac{1}{g} \int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Enfin cette valeur de $-\frac{\varepsilon}{\rho g \sigma}\int_{\chi}\frac{du}{dN}d\chi$, portée dans l'équation (3), donnera la formule du mouvement graduellement varié

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \beta U\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{g}\int_{\sigma} u'\varphi\frac{d\sigma}{\sigma}. \tag{11}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer le dernier terme de (10) et celui de (11). A cet effet, observons qu'on ne les altérera que de quantités négligeables si l'on y remplace, au besoin, φ par $\frac{u}{U}$, et substituons, d'ailleurs, à u' l'expression

$$\frac{dU}{dt}\frac{u}{U} + \left(U\frac{dU}{dx}\right)\frac{u^2}{U^2} + U\left(\frac{d\frac{u}{U}}{dt} + u\frac{d\frac{u}{U}}{dx} + v\frac{d\frac{u}{U}}{dy} + w\frac{d\frac{u}{U}}{dz}\right),$$

identique à $\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$. Les intégrations $\int_{\sigma}$ se feront de la même manière que dans le cas de mouvements tourbillonnants (n° 193, p. 496 à 499 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*); en appelant $1+\eta$ et α les coefficients

$$1+\eta = \int_{\sigma}\varphi^2\frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \alpha = \int_{\sigma}\varphi^3\frac{d\sigma}{\sigma}, \tag{11 bis}$$

constants pour une même forme de section, il viendra

$$\int_{\sigma} u'\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dU}{dt} + (1+\eta)U\frac{dU}{dx} - \eta\frac{U}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}, \tag{12}$$

$$\int_{\sigma} u'\varphi\frac{d\sigma}{\sigma} = (1+\eta)\frac{dU}{dt} + \alpha U\frac{dU}{dx} - \frac{\alpha-1-\eta}{2}\frac{U}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}; \tag{13}$$

d'où il résulte

$$\int_{\sigma} u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma} = \eta\frac{dU}{dt} + (\alpha-1-\eta)U\frac{dU}{dx} + \frac{1+3\eta-\alpha}{2}\frac{U}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}. \tag{13 bis}$$

On substituera respectivement les seconds membres des relations (13 *bis*) et (13), divisés par g, au dernier terme de (10) et à celui de (11).

5. Il faut, pour la graduelle variation du mouvement, que le rapport $\frac{u}{U}$ ne diffère pas notablement de φ : par suite, les dérivées de $\frac{u}{U}$ en y, z et la dérivée $\frac{d}{dN}\frac{u}{U}$ ne doivent différer de ce qu'elles sont quand le régime est uniforme que par d'assez petites fractions de leurs valeurs. Ainsi le mouvement n'est graduellement varié, ou n'est régi par les lois approchées précédentes, qu'autant que le dernier terme de (10), $\frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}$, est une petite fraction du précédent, $\beta U\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2$. Or, dans les mouvements bien continus, le rapport $\frac{u}{U}$ ou, sensiblement, φ s'annule aux parois, en sorte qu'il varie dans de larges limites de part et d'autre de sa valeur moyenne 1 : la différence $\varphi - 1$ n'y est pas petite en comparaison de φ, et l'intégrale $\int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}$ s'y trouve tout à fait comparable à $\int_\sigma u'\varphi\frac{d\sigma}{\sigma}$. La graduelle variation du mouvement y exige donc que le dernier terme de l'équation (11) ne soit qu'une petite fraction du précédent, ou que l'équation du régime uniforme

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \beta\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 U \tag{14}$$

se trouve sensiblement vérifiée. Ainsi, dans les mouvements bien continus, tout régime graduellement varié est un régime *quasi-uniforme*, comme je l'ai dit au commencement de ce Mémoire complémentaire, et l'on peut, dans la pratique, lui appliquer approximativement la formule même du régime uniforme. Il en serait autrement si la fonction φ ne s'écartait que d'une manière modérée de sa valeur moyenne 1, ainsi qu'il arrive dans les tuyaux d'un certain calibre et dans les canaux découverts.

Dans ces derniers cas, η est assez petit pour qu'on puisse négliger devant ce coefficient ses puissances d'un degré supérieur à 1, de manière à rendre linéaires par rapport à η, et d'une intelligence facile, un grand nombre de formules ; telles sont, par exemple, celles des nos 130, 139, 182 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 285, 353, et 439), qui concernent la vitesse de propagation des ondes et des remous le long d'un courant [*].

---

[*] J'observerai, à cette occasion, que les formules (223), (225), (226) du même

6. Quand les sections sont, ou rectangulaires très-larges, d'un rayon moyen h, ou circulaires, d'un rayon moyen $\frac{R}{2}$, la fonction φ reçoit respectivement les deux valeurs

$$\varphi = \text{soit } \frac{3}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \text{ soit } 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{14 bis}$$

$h - z$, r désignant la distance des divers points de la section au fond ou au centre. Les intégrales $1 + \eta = \int_\sigma \varphi^2 \frac{d\sigma}{\sigma}$, $\alpha = \int_\sigma \varphi^3 \frac{d\sigma}{\sigma}$ ont alors pour expressions respectives

$$1 + \eta = \text{soit} \int_0^h \varphi^2 \frac{dz}{h}, \text{ soit } 2\int_0^R \varphi^2 \frac{r}{R}\frac{dr}{R};$$
$$\alpha = \text{soit} \int_0^h \varphi^3 \frac{dz}{h}, \text{ soit } 2\int_0^R \varphi^3 \frac{r}{R}\frac{dr}{R};$$

et elles se calculent aisément. On trouve

$$(15) \quad \begin{cases} \eta = \frac{1}{5}, \quad \alpha - 1 = \frac{19}{35} \text{ (section rectangle)}; \\ \eta = \frac{1}{3}, \quad \alpha - 1 = 1 \text{ (section circulaire)}. \end{cases}$$

Mémoire (p. 231 et 232), relatives à l'influence que des ondulations du fond exercent sur la surface, montrent que cette influence décroît à mesure que la profondeur H grandit. Les pentes superficielles se rapprochent donc de la pente moyenne du fond dans une rivière en crue; par suite, la formule (63 *quater*) [p. 82] du débit d'un fleuve doit être applicable pendant les crues, même dans des cas où elle ne l'est pas en temps d'étiage; et les considérations du n° 222 (p. 606) en sont aussi confirmées. Il y aurait un grand nombre de réflexions analogues que suggérerait l'étude des théories exposées dans cet Ouvrage sur les eaux courantes. Par exemple, la méthode qui, au bas de la page 306, donne la valeur moyenne de $\frac{du}{dt}$ permettrait d'apprécier l'approximation que comporte, au § XIX (p. 189), l'emploi de la formule (147 *bis*), en donnant un moyen d'évaluer, sur une section, la valeur moyenne de $\frac{du}{ds}$. Par exemple encore, on pourrait étudier les remous de courbure insensible auxquels les formules du n° 187 (p. 451) assignent des formes permanentes, qu'on reconnaîtrait d'ailleurs être instables, c'est-à-dire telles, que des formes vraies, un peu différentes de celles-là à l'origine, s'en éloigneraient de plus en plus. De même, d'après les résultats établis à la page 344, les lois de Gerstner s'étendraient aux houles atmosphériques, etc.

Ces valeurs de η, $\alpha - 1$ ne sont pas petites par rapport à 1, comme il était aisé de le prévoir. Le rapport $\frac{\alpha - 1}{\eta}$ vaut précisément 3 pour une section circulaire, tandis qu'il est inférieur à 3, égal à $\frac{19}{7} = 2,7, \ldots,$ pour une section rectangulaire large. Ce rapport vaudrait presque 3 s'il s'agissait de tuyaux de conduite et de canaux découverts (cas où il s'écarte peu de 2,925, comme on voit au n° 45 *bis*, page 112, de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*); en effet, d'après (11 *bis*), η est comparable à $(\varphi - 1)^2$, et $\alpha - 1 - 3\eta$ égale la valeur moyenne de $(\varphi - 1)^3$, quantité (de l'ordre de $\eta\sqrt{\eta}$) insensible devant 3η dès que φ s'écarte peu de 1.

7. Les petites composantes transversales v, w de la vitesse, et la fonction $\varpi = \frac{u}{U} - \varphi$, se détermineraient, dans les cas où le calcul en est abordable, de la même manière que pour des mouvements non continus, c'est-à-dire par les formules démontrées au n° 194 *bis* (p. 505) du même Mémoire *Sur la théorie des eaux courantes*.

Au reste, les résultats précédents se déduiraient aussi de l'analyse du n° 193 de ce Mémoire, en supposant les deux coefficients A, B (caractéristiques, respectivement, du frottement intérieur et du frottement extérieur) proportionnels à un même monôme de la forme $\left(\frac{\sigma}{\chi}\right)^m u_0^n$, et en prenant, à la fin des calculs, $m = -1$, $n = -1$, $\frac{1}{B} = 0$. Cette généralisation n'introduirait aucun autre changement que celui qui résulterait, vers le milieu de la page 495, de ce que, dans l'expression $\frac{1}{\sigma}\int_\chi Bu(u - \varphi U)\,d\chi$, le facteur Bu serait proportionnel à u^{1+n} ou sensiblement à $(\varphi U)^{1+n}$; et, en conséquence, l'expression $Bu(u - \varphi U)$ serait elle-même proportionnelle à

$$(\varphi U)^{1+n}(u - \varphi U) = \text{sensiblement } \frac{u^{2+n} - (\varphi U)^{2+n}}{2+n}.$$

Il s'ensuivrait que le dernier terme de (450 *bis*) aurait en coefficient, non plus 2, mais $2 + n$.

8. Lorsque les mouvements sont tourbillonnants, la formule (10) est remplacée par une autre, portant au même Mémoire le n° 450 *bis*

(p. 495), et qui revient à prendre, dans le cas d'un régime graduellement varié,

$$(16)\qquad -\frac{1}{\rho g\sigma}\int_\chi \varepsilon\frac{du}{dN}d\chi = b'U^2\frac{\chi}{\sigma}+\frac{2}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma},$$

où b' désigne un coefficient constant pour toutes les sections semblables. Par suite, l'équation du mouvement, au lieu de (11), est

$$(17)\qquad \sin I-\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}=b'U^2\frac{\chi}{\sigma}+\frac{1}{g}\int_\sigma u'(2\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

J'ai montré, au n° 2 des *Additions* à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (*Savants étrangers*, t. XXIV, p. 10), qu'il existe des modes d'écoulement intermédiaires, moins continus que ceux qui se produisent dans les très-petites sections et moins tourbillonnants que ceux qui se produisent dans les grandes, pour lesquels l'expression du frottement extérieur (rapporté à l'unité de section et divisé par ρg), s'éloigne peu, quant au terme principal seul subsistant dans un régime uniforme, ou de l'une des deux formes extrêmes $b'U^2\frac{\chi}{\sigma}$, $\beta U\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2$, ou de la forme moyenne $KU^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}$. Il est vraisemblable que le petit terme de cette expression qui dépend de la non-uniformité du régime aura, dans les mêmes cas, une expression peu différente respectivement, ou de celles que nous venons de trouver, $\frac{2}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$, $\frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$, ou de l'expression intermédiaire $\frac{3}{2}\frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$. Une équation approchée du mouvement graduellement varié sera donc, dans le cas moyen,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin I-\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}&=K\left(U\frac{\chi}{\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{g}\int_\sigma u'\frac{d\sigma}{\sigma}+\frac{3}{2g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}\\ &=K\left(U\frac{\chi}{\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2g}\int_\sigma u'(3\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma};\end{aligned}\right.$$

les intégrales $\int_\sigma u'\frac{d\sigma}{\sigma}$, $\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$ auraient toujours les valeurs (12), (13 *bis*).

Quand le mouvement est permanent, ou que l'on a $\frac{dU}{dt}=0, \frac{d\sigma}{dt}=0$, le second membre de (13) se réduit à $\alpha U \frac{dU}{dx}$, et l'équation (11) devient

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \beta U \left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 + \alpha \frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right). \tag{18 bis}$$

Le terme de cette formule qui dépend de la non-uniformité, $\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$, est précisément celui que contient l'équation de mouvement permanent donnée par Coriolis, équation généralement inexacte, pour deux raisons exposées au n° 46 (p. 112) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*. Les deux erreurs, de sens contraires, qui affectent l'équation de Coriolis, et qui ne se neutralisent qu'en partie dans le cas usuel où les mouvements sont tourbillonnants, se détruisent donc exactement quand les mouvements sont bien continus [*].

§ II. — *Influence du frottement extérieur sur les coefficients d'extinction des ondes, périodiques ou non périodiques, quand les mouvements sont bien continus.*

9. J'ai montré, au n° 15 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 54), et au n° 3 des *Additions* à ce Mémoire (p. 12), que des

[*] J'observerai, à ce propos, que la théorie du régime uniforme, spécifiée pour des mouvements bien continus se faisant avec des vitesses nulles ou insensibles contre les parois, doit s'appliquer même à l'écoulement du mercure dans un tube capillaire en verre sous l'influence d'assez fortes pressions. En effet, le frottement d'une paroi non mouillée croît probablement avec la pression, comme je l'ai dit vers le milieu de la page 2 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, et il doit faire presque annuler la vitesse de la couche qui le supporte, dès que la pression est un peu grande. Si celle-ci reçoit des valeurs seulement suffisantes pour rendre la vitesse à la paroi peu sensible, la formule (14), qui exprime les lois de Poiseuille, pourra représenter encore assez bien chaque série d'expériences, pourvu qu'on y mette pour β une certaine valeur moyenne propre à la série. Ce sont sans doute des écoulements de cette nature que M. Villari a étudiés. (Voir, dans les *Comptes rendus* de la séance du 3 janvier 1877 de l'Académie des Sciences, t. LXXXIV, p. 33, la Note intéressante, malheureusement très-succincte, de M. Villari, sur l'écoulement du mercure dans les tubes capillaires en verre.)

intumescences d'une longueur totale assez peu grande et des ondes périodiques d'une durée d'oscillation modérée, produites ou propagées au sein d'une eau d'abord en repos, se comportent à fort peu près, durant des intervalles de temps restreints, comme si les frottements n'existaient pas. Ceux-ci, tout en usant à la longue le mouvement, n'en altèrent pas sensiblement les lois. Toutefois, la démonstration ne concerne que les parties intérieures du fluide; elle fait abstraction d'une couche mince contiguë à la surface libre et aux parois, où les modes de variation, d'un point (x, y, z) aux points voisins, des composantes u, v, w de la vitesse, sont entièrement changés par l'intervention du frottement extérieur. Je me propose ici d'étudier précisément les phénomènes que présente cette couche mince.

A la surface libre, le frottement est sensiblement nul. La nécessité où sont, par suite, les glissements mutuels des couches parallèles à la surface, de s'annuler sur la surface même, fait varier rapidement ces glissements, ainsi que les dérivées $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$, mais sans changer l'ordre de grandeur de celles-ci, à partir des points intérieurs voisins, où la pression p ne diffère d'ailleurs de la pression atmosphérique que d'une quantité insignifiante. L'épaisseur totale des couches dont il s'agit étant fort petite, les variations absolues que les composantes u, v, w y éprouvent et les pertes d'énergie qui y sont dues aux frottements intérieurs restent insensibles.

10. Mais il n'en est pas de même aux parois, dans le cas ordinaire où celles-ci sont mouillées par le fluide, et où la hauteur des ondes est assez faible pour que les mouvements restent partout bien continus. Supposons à peu près rectilignes et parallèles les trajectoires des molécules voisines d'une certaine portion de paroi, ce qui sera évidemment admissible presque toujours, et prenons, sur la paroi fixe, une parallèle à ces trajectoires pour axe des x, une perpendiculaire, dans le plan tangent à la surface, pour axe des y, une normale, dirigée vers l'intérieur, pour axe des z. La composante longitudinale u de la vitesse, nulle sur la paroi même, croîtra rapidement en valeur absolue à mesure que z grandira; et elle deviendra, à une petite distance, sensiblement égale à la vitesse u_0, dite *vitesse au fond*, qu'on aurait pour $z = 0$ s'il

n'existait pas de frottements. Observons : 1° que la condition de continuité, jointe à $v=0$, et à la relation spéciale $w=0$ pour $z=0$, donne $w=-\int_0^z \frac{du}{dx}dz$, en sorte que w est une quantité insensible pour les petites valeurs de z, ainsi que ses dérivées en x et y; 2° que les expressions $\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$ et $\varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)$ se réduisent sensiblement à $\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}$ et à $\varepsilon\frac{d^2w}{dz^2}=-\varepsilon\frac{d^2u}{dx\,dz}$; 3° que l'accélération latérale w' est négligeable comme w, tandis que l'accélération longitudinale

$$u'=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+w\frac{du}{dz}=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}-\frac{du}{dz}\int_0^z\frac{du}{dx}dz$$

n'a que son premier terme qui soit sensible quand u et sa dérivée en x sont de petites quantités, comme il arrive, en général, dans les problèmes d'ondes. Les deux équations indéfinies du mouvement qu'il y a lieu de considérer seront donc, en appelant X, Z les composantes de la pesanteur suivant les deux axes des x et des z,

$$(19)\qquad \varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{dp}{dx}+\rho X=\rho\frac{du}{dt},\quad -\varepsilon\frac{d^2u}{dx\,dz}-\frac{dp}{dz}+\rho Z=0.$$

Dans la première de ces équations, le terme $\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}$ sera généralement fini comme le terme $\frac{dp}{dx}$; donc la dérivée seconde $\frac{d^2u}{dz^2}$ se trouvera de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\varepsilon}$, et la dérivée bien plus petite $\frac{d^2u}{dx\,dz}$, comparable à $\frac{du}{dz}$ ou à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, aura son produit par ε insensible. La seconde équation (19), ainsi réduite à $\frac{dp}{dz}=\rho Z$, montre que la pression p varie, à partir de l'intérieur du fluide, quand on pénètre dans la couche contiguë aux parois, comme dans le cas où il n'y aurait pas de frottements (c'est-à-dire de quantités insignifiantes). Mais, dans ce cas, ε serait nul, et la première équation (19), où u_0 remplacerait u, deviendrait

$$-\frac{dp}{dx}+\rho X=\rho\frac{du_0}{dt};$$

cette nouvelle relation, retranchée de la première (19), donne donc l'équation indéfinie du problème

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dz^2} = \rho \frac{d(u - u_0)}{dt};$$

ou bien

$$(20) \qquad \frac{d^2}{dz^2}(u - u_0) = \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d}{dt}(u - u_0).$$

11. En y joignant les deux conditions spéciales

$$(20\ bis) \qquad \begin{cases} u - u_0 = -u_0 & \text{(à la paroi, pour } z = 0\text{)}, \\ u - u_0 = 0 & \text{(à l'intérieur, pour } z = \infty\text{)}, \end{cases}$$

et observant que la vitesse u_0, dite *vitesse à la paroi*, sera donnée en fonction de t par la théorie ordinaire des ondes, on aura toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer la perturbation *locale* $u - u_0$, dans les deux classes de phénomènes auxquelles cette théorie s'applique, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit, ou de petites oscillations dans lesquelles la valeur de $u - u_0$ n'augmente pas indéfiniment avec le temps, ou de mouvements ayant commencé depuis un temps modéré, en sorte qu'on ait $u - u_0 = 0$ pour $t = -\infty$.

En effet, si l'on remplace $u - u_0$ par $u - u_0 + u_1$ dans ces équations, leurs transformées en u_1 seront

$$(20\ ter) \quad -\frac{d^2 u_1}{dz^2} + \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{du_1}{dt} = 0, \quad u_1 = 0 \text{ (pour } z = 0 \text{ et pour } z = \infty\text{)}.$$

Multiplions la première (20 *ter*) par $u_1\,dz$, et intégrons de $z = 0$ à $z = \infty$, en appliquant au premier terme le procédé de l'intégration par parties, sans oublier les conditions $u_1 = 0$ aux deux limites. Il viendra

$$\int_0^\infty \frac{du_1^2}{dz^2}\,dz + \frac{\rho}{2\varepsilon}\frac{d}{dt}\int_0^\infty u_1^2\,dz = 0.$$

Celle-ci, multipliée par dt, puis intégrée, soit à partir d'une époque où le mouvement n'existait pas et où l'on avait $u_1 = 0$, soit entre deux

époques distantes d'une période 2T, si le mouvement est exactement périodique, ou séparées par un très-grand intervalle 2T s'il s'agit d'oscillations complexes, et divisée enfin, dans ces derniers cas, par l'intervalle même 2T, donne, ou bien

$$\int_{-\infty}^{t} dt \int_0^\infty \frac{du_1^2}{dz^2}\,dz + \frac{\rho}{2\varepsilon}\int_0^\infty u_1^2\,dz = 0,$$

ou bien

$$\int_t^{t+2T} \frac{dt}{2T}\int_0^\infty \frac{du_1^2}{dz^2}\,dz = 0.$$

Ces équations ont leurs premiers membres composés d'éléments essentiellement positifs; on ne peut donc y satisfaire qu'en posant $\frac{du_1}{dz} = 0$, et même $u_1 = 0$, puisque u_1 s'annule pour $z = 0$ et pour $z = \infty$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

12. Les pertes d'énergie produites par les frottements intérieurs de la couche contiguë aux parois vaudront sensiblement, par unité de surface et dans l'unité de temps, d'après l'expression (m') du n° 6 des *Additions* à la théorie des eaux courantes (p. 28),

$$\varepsilon\int_0^\infty \frac{du^2}{dz^2}\,dz. \tag{21}$$

Or, si l'on multiplie l'équation (20) par $(u - u_0)\,dz$, puis qu'on intègre les résultats de $z = 0$ à $z = \infty$, en appliquant l'intégration par parties au premier terme, désignant par $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ la valeur de $\frac{du}{dz}$ pour $z = 0$ et tenant compte des conditions (20 *bis*), il vient

$$u_0\left(\frac{du}{dz}\right)_0 - \int_0^\infty \frac{du^2}{dz^2}\,dz = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{\rho(u-u_0)^2}{2\varepsilon}\,dz.$$

Tirons de celle-ci la valeur de $\int_0^\infty \frac{du^2}{dz^2}\,dz$ pour la substituer dans (21): nous aurons, comme expression du travail absorbé, dans l'unité de temps, par les frottements de la couche contiguë à l'unité d'aire de

paroi,

$$(21\ bis)\qquad \varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0 - \frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{\rho}{2}(u-u_0)^2\,dz.$$

Multiplions (21 *bis*) par dt, et intégrons, soit de $t=-\infty$ à $t=\infty$, quand il s'agit d'une intumescence limitée propagée le long d'un canal, ou que $u-u_0$ s'annule aux deux époques $t=\mp\infty$, soit, dans le cas contraire d'un mouvement oscillatoire, entre deux époques séparées par l'intervalle $2T$, égal à une période, ou très-grand suivant qu'il y a ou qu'il n'y a pas périodicité. Le travail total absorbé égalera dans tous ces cas, sauf erreur relative infiniment petite, celui qu'on aurait en en réduisant l'expression (21 *bis*) à son premier terme.

Ainsi, *le frottement de la paroi* $\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ *par unité d'aire ne travaille pas, puisque la vitesse à la paroi est nulle; mais il développe des frottements intérieurs, qui détruisent un certain travail total, précisément égal à celui qu'il aurait détruit lui-même si la vitesse à la paroi avait été celle,* u_0, *qui s'observe aux points intérieurs, peu distants, où cette vitesse cesse de varier rapidement.*

Dans le cas d'une intumescence limitée propagée le long d'un canal, l'expression de u_0 est de la forme $F\left(t-\frac{x}{\omega}\right)$, ω désignant la vitesse de propagation; par suite, les fonctions u, $\int_0^\infty \frac{\rho}{2}(u-u_0)^2\,dz$ dépendent aussi de $t-\frac{x}{\omega}$, et leurs dérivées par rapport à t égalent leurs dérivées par rapport à x multipliées par $-\omega$. L'expression (21 *bis*) peut alors s'écrire

$$(21\ ter)\qquad \varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0 + \frac{1}{\omega}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{\rho}{2}(u-u_0)^2\,dz.$$

Le travail total détruit sous l'influence du frottement extérieur d'un bout de l'intumescence à l'autre, par unité de largeur des parois et dans l'unité de temps, sera le produit de cette expression par dx, intégré de $x=-\infty$ à $x=\infty$. Le terme exactement intégrable s'annulant aux deux limites, ce travail se réduit à

$$(22)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0\,dx;$$

il *égale celui qu'aurait détruit directement le frottement extérieur, si la vitesse à la paroi avait eu les valeurs u_0 qu'elle reçoit un peu à l'intérieur.*

Le même travail, évalué dans l'hypothèse simple que le frottement extérieur fût le produit d'un coefficient constant ε_1 par la vitesse u_0, vaudrait $\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2\, dx$. En égalant cette expression à (22), on voit qu'elle n'est exacte que si ε_1 reçoit la valeur

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u_0 \left(\frac{du}{dz}\right)_0 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2\, dx}.$$

Cette valeur revient évidemment à

$$(22\ bis) \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u_0 \left(\frac{du}{dz}\right)_0 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2\, dt}.$$

Une valeur de ε_1, calculée au moyen de la formule (22 *bis*), permettra de même, d'après ce qui précède, de représenter par $\varepsilon_1 u_0$ le frottement à la paroi dans le cas d'ondes périodiques, sans qu'il en résulte d'erreur sur le travail *total* détruit par l'influence du frottement qu'exerce l'unité d'aire d'une partie considérée de paroi. Alors on pourra remplacer les deux limites $\mp\infty$ des intégrations, limites qui sont les mêmes dans les deux intégrales dont (22 *bis*) contient le rapport, par deux autres, distantes d'une période complète 2T.

15. On satisfait à l'équation linéaire (20) et à la deuxième condition (20 *bis*), en prenant pour $u - u_0$ une somme d'intégrales simples de la forme

$$(23) \qquad u - u_0 = -ce^{-z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}} \cos\left(\frac{\pi t}{T} - c' - z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right),$$

où T est une constante positive, d'ailleurs arbitraire, et c, c' des fonctions arbitraires de x, y. La quantité $-(u - u_0)$ se réduit alors, pour

$z = 0$, à la somme des expressions $c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$: la première condition (20 *bis*) sera donc également satisfaite, et la valeur totale de $u - u_0$ obtenue conviendra, pourvu qu'on ait

$$u_0 = \sum c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right), \tag{24}$$

c'est-à-dire pourvu que le mouvement, purement oscillatoire, résulte de la superposition de simples mouvements pendulaires. L'expression de $u - u_0$, différentiée par rapport à z, donnera d'ailleurs, pour $z = 0$,

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = \sum c\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\left[\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)\right]. \tag{25}$$

Le produit des deux seconds membres de (24) et (25) se réduit, lorsqu'on prend sa moyenne pour les divers instants successifs, aux termes de son développement dont les deux facteurs contiennent le cosinus d'une même fonction linéaire de t; car on sait que des produits de l'une quelconque des deux formes

$$\left[\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)\right]\cos\left(\frac{\pi t}{T_1} - c''\right),$$
$$\sin\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$$

se décomposent en demi-sommes et en demi-différences de cosinus d'arcs fonctions linéaires de t, cosinus dont la valeur moyenne est nulle. On aura donc en moyenne, si l'on observe que $\cos^2\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$ a pour valeur moyenne $\frac{1}{2}$,

$$\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0 = \sum\sqrt{\frac{\rho\pi\varepsilon}{2T}}\,c^2\cos^2\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right) = \sum\sqrt{\frac{\rho\pi\varepsilon}{2T}}\,\frac{c^2}{2}. \tag{26}$$

Le travail détruit par l'influence du frottement extérieur, dans un mouvement oscillatoire complexe, est donc la somme des travaux que cette influence détruirait séparément dans chacun des mouvements

simples qui composent l'agitation considérée. C'est, d'ailleurs, ce qu'on aurait pu déduire du théorème général démontré au n° 6 (p. 32) des *Additions* à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*.

Le théorème subsisterait même si l'on décomposait chaque mouvement pendulaire en deux *distincts*, dont les phases différeraient de $\frac{\pi}{2}$, comme, par exemple, si l'on remplaçait $c \cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$ par $c \cos c' \cos\frac{\pi t}{T} + c \sin c' \sin\frac{\pi t}{T}$; car rien n'empêcherait de substituer, dans le troisième membre de (26), au carré de la demi-amplitude totale c, la somme des carrés des demi-amplitudes partielles, $c \cos c'$, $c \sin c'$, des mouvements composants : c'est précisément ce mode de décomposition qu'on emploie quand on remplace une houle par deux clapotis.

Dans le cas d'un simple mouvement pendulaire, de houle ou de clapotis, le second membre de (26) se réduit à un seul terme, qu'on peut écrire $\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}}\, u_0^2$. Le frottement extérieur détruit donc alors par son influence, en moyenne, un travail égal à celui qu'il détruirait directement si la vitesse contre la paroi était celle, u_0, qui s'observe à une petite distance à l'intérieur, et que le frottement dont il s'agit fût le produit de cette vitesse u_0 par le coefficient $\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}}$. L'expression $\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}}$ représente ce que j'ai appelé ε_1 dans la formule (22 *bis*) ci-dessus, et ce que j'ai considéré, au n° 6 des *Additions à la théorie des eaux courantes* [p. 37, formule (s)] et à la fin du n° 120 *bis* du Mémoire principal (p. 261), sous le nom de *coefficient du frottement extérieur*. Le coefficient ε_1 n'est donc pas absolument constant, comme j'avais cru, pour simplifier, pouvoir l'admettre dans la formule (s) citée; et il faut poser en réalité, du moins quand les ondes sont assez peu hautes pour que les mouvements restent bien continus,

$$(27) \qquad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}},$$

T désignant la demi-période d'oscillation. Par suite, il n'est pas exact de dire, comme je l'ai fait à la page 38 des *Additions*, que le coeffi-

cient d'extinction α d'une houle ou d'un clapotis, produits au sein d'une eau de petite profondeur H, tend vers une limite, tout en grandissant un peu, à mesure que la longueur d'onde $2L$ et la période $2T$ augmentent. Sans doute α est représenté par la formule (s); mais ε_1 y prend la valeur (27), et l'on a sensiblement, pour T un peu grand,

$$(28) \qquad \alpha = \frac{\varepsilon_1}{2\rho H} = \frac{1}{2H}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2\rho T}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon\sqrt{g}}{2\rho H\sqrt{H}}}\frac{1}{\sqrt{L}}.$$

Les longues vagues sont donc, même dans les petites profondeurs, celles que le frottement use le moins vite; toutefois, le coefficient d'extinction α ne décroît, pour ces ondes, qu'en raison inverse de la racine carrée de leur longueur, alors qu'elle décroîtrait, dans les grandes profondeurs, en raison inverse du carré de cette longueur [*].

14. Supposons actuellement qu'il s'agisse d'une intumescence de forme déterminée, propagée le long d'un canal. Soit t' le temps, compté à partir d'une époque où le fluide n'était pas encore en mouvement à l'endroit particulier que l'on considère. La valeur de u_0 sera, près de la portion de paroi correspondante, une certaine fonction donnée $f(t')$, nulle pour les valeurs négatives de sa variable.

Le cas le plus simple serait celui où $f(t')$ s'annulerait jusqu'à une certaine époque $t' = \alpha$ et égalerait -1 pour $t' > \alpha$. Appelons φ la valeur que reçoit alors $u - u_0$, et prenons l'intégrale de l'équation (20) sous sa forme classique, bien connue,

$$(29) \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2}\,\mathrm{F}\left[z + 2m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}(t'-\alpha)}\right]dm,$$

[*] En conséquence, dans les petites profondeurs comme dans les grandes, les longues ondes à mouvements pendulaires subsistent longtemps après que se sont éteintes de petites ondes produites en même temps; de sorte que, par exemple, les ondes non sinusoïdales étudiées au n° 162 *bis* (p. 390) des *Eaux courantes*, et dans une note de la page 54 des *Additions*, ne tarderaient pas à se réduire à de simples ondes sinusoïdales.

où j'ai mis t' pour t. La fonction φ se réduit, comme on sait, à $F(z)$ pour $t' = \alpha$. Les conditions $u = 0$, $u_0 = 0$ à l'époque $t' = \alpha$, obligent de poser, à cette époque, $\varphi = 0$ en tous les points du fluide, ou pour $z > 0$. Donc la fonction $F(z)$ est nulle pour les valeurs positives de sa variable. Quant à ses valeurs pour $z < 0$, il faut les supposer constantes, égales à 2, si l'on veut que $\varphi = 1$ quand $z = 0$ et que t' est $> \alpha$. Faisons, en effet, $z = 0$, $\varphi = 1$, $t' > \alpha$, et observons que la fonction F s'annule pour les valeurs positives de sa variable. La formule (29) devient

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-m^2} F\left[2m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}(t' - \alpha)}\right] dm:$$

il est naturel d'y satisfaire en prenant la fonction F constante, ou indépendante de t', comme le premier membre, pour toutes les valeurs négatives de sa variable; et l'on voit alors qu'il faut la faire égale à l'inverse de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-m^2} dm$, c'est-à-dire égale à 2. La formule (29), où l'on peut ne faire varier m qu'entre les limites qui rendent négative l'expression $z + 2m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}(t' - \alpha)}$, s'écrira donc

$$(30) \qquad \varphi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-z\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\varepsilon(t'-\alpha)}}} e^{-m^2} dm = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\varepsilon(t'-\alpha)}}}^{\infty} e^{-m^2} dm.$$

En résumé, la fonction φ que nous venons de déterminer, ou qu'exprime la formule (30), jouit des propriétés remarquables suivantes : 1° elle satisfait à l'équation indéfinie

$$(31) \qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d\varphi}{dt'};$$

2° elle vérifie les deux conditions définies

$$(32) \qquad \varphi = 0 \text{ (pour } \alpha = t' \text{ et } z > 0),$$
$$(33) \qquad \varphi = 1 \text{ (pour } z = 0 \text{ et } \alpha < t').$$

Il est actuellement facile de trouver l'expression de $u - u_0$ dans le cas

général où $u_0 = f(t')$. Il suffit d'observer que l'on satisfait alors à la condition spéciale à la paroi,

$$u - u_0 = -f(t') \quad \text{ou} \quad u - u_0 = -\int_0^{t'} f'(\alpha)\, d\alpha \text{ (pour } z = 0),$$

et, du même coup, à l'équation indéfinie (20), en posant

$$(34) \qquad u - u_0 = -\int_0^{t'} f'(\alpha) \varphi\, d\alpha.$$

Effectivement, $\varphi = 1$ à la paroi, d'après (33), en sorte qu'on a bien $u - u_0 = -f(t')$ pour $z = 0$. D'autre part, en différentiant (34), soit deux fois par rapport à z, soit une fois par rapport à t', sans oublier la condition (32) qui fait annuler un terme aux limites, il vient

$$\frac{d^2(u - u_0)}{dz^2} = -\int_0^{t'} f'(\alpha) \frac{d^2\varphi}{dz^2} d\alpha,$$

$$\frac{d(u - u_0)}{dt'} = -[f'(\alpha)\varphi]_{\alpha=t'} - \int_0^{t'} f'(\alpha) \frac{d\varphi}{dt'} d\alpha = -\int_0^{t'} f'(\alpha) \frac{d\varphi}{dt'} d\alpha.$$

Par suite, en vertu de (31),

$$(35) \qquad \frac{d^2(u - u_0)}{dz^2} - \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d(u - u_0)}{dt'} = -\int_0^{t'} f'(\alpha) \left[\frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d\varphi}{dt'}\right] d\alpha = 0.$$

Enfin la valeur (34) de $u - u_0$ se réduit bien à zéro pour $t' = 0$.

On peut, dans le second membre de (34), remplacer $f'(\alpha)d\alpha$ par $df(\alpha)$ et intégrer par parties. La condition (32) et celle d'après laquelle $f(\alpha)$ s'annule pour $\alpha = 0$ feront disparaître les termes aux limites; la formule (30) donnant, en outre,

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\pi\varepsilon}} \frac{z}{(t' - \alpha)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon(t' - \alpha)}},$$

il viendra

$$(36) \qquad u - u_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\pi\varepsilon}} \int_0^{t'} f(\alpha) \frac{z}{(t' - \alpha)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon(t' - \alpha)}} d\alpha.$$

Pour simplifier cette formule, posons enfin

$$m = \frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon(t'-\alpha)}}, \quad \text{ou} \quad \alpha = t' - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}, \quad d\alpha = \frac{\rho z^2 dm}{2\varepsilon m^3};$$

nous aurons l'expression définitive de $u - u_0$

$$(37) \qquad u - u_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon t'}}}^{\infty} f\left(t' - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right) e^{-m^2}\, dm.$$

J'ai trouvé cette intégrale remarquable de l'équation (20), démontrée d'une autre manière, dans le *Cours de Physique mathématique* de M. Émile Mathieu (p. 217).

15. La partie antérieure d'une intumescence propagée le long d'un canal se raccorde asymptotiquement avec le liquide en repos situé à son avant; ce qui revient à dire qu'on peut supposer l'intumescence partie depuis un temps infini, ou qu'il faut poser $t' = \infty$ pour toutes les valeurs finies de la fonction $f(t')$.

Il est alors naturel de déplacer l'origine des temps, ou de prendre $t' = t'_0 + t$, t'_0 désignant une constante positive infinie, t une variable dont les valeurs finies correspondent aux valeurs finies de $f(t')$. En désignant, d'ailleurs, par $f(t)$ ce que nous appelions $f(t')$, la formule (37) donnera l'expression de $u - u_0$, que nous adopterons,

$$(38) \qquad u - u_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f\left(t - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right) e^{-m^2}\, dm.$$

Elle se réduit bien à $-f(t)$ ou $-u_0$ pour $z = 0$. En outre, on vérifie aisément qu'elle satisfait à l'équation (20), pourvu que la dérivée $f'\left(t - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)$ s'annule pour une valeur infiniment petite m_0 de m, c'est-à-dire pour une valeur infinie négative de sa variable, comme il arrive, soit dans le cas d'une intumescence propagée au sein d'une eau en repos, soit dans celui d'ondes périodiques, pour lesquelles $f(t)$ ou u_0 et $f'(t)$ s'annulent deux fois au moins par période $2T$. Effectivement, si, après avoir remplacé la limite inférieure de l'intégrale par m_0, on différentie deux fois sous le signe $\int$, par rapport à z, l'ex-

pression (38) de $u - u_0$, ce qu'on trouve revient identiquement à

$$(38\ bis)\qquad \frac{d^2(u-u_0)}{dz^2} = \frac{\rho}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_{m_0}^{\infty} e^{-m^2}\frac{d}{dm}\left[\frac{-1}{m} f'\left(t-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)\right] dm.$$

On n'a pas eu besoin de faire varier m_0 en fonction de z, même en convenant de prendre $t - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon m_0^2}$ constamment égal à la valeur choisie pour laquelle la fonction f' s'annule, car cela revient à supposer le rapport $\frac{m_0}{z}$ constant ou égal à $\frac{dm_0}{dz}$, en sorte que la dérivée $\frac{dm_0}{dz} = \frac{m_0}{z}$ est infiniment petite et négligeable; on aurait de plus

$$\frac{d^2 m_0}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{m_0}{z}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{dm_0}{dz} - \frac{m_0}{z}\right) = 0.$$

Effectuons sur le second membre de (38 *bis*) une intégration par parties et observons que les termes aux limites s'annulent; il viendra

$$\frac{d^2(u-u_0)}{dz^2} = -\frac{2\rho}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f'\left(t-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right) e^{-m^2}\, dm,$$

ce qui est bien le produit, par $\frac{\rho}{\varepsilon}$, de la dérivée du second membre de (38) par rapport à t.

Enfin la formule (38) donne aussi $u - u_0 = 0$ pour $z = \infty$. On le reconnait en posant, sous le signe $\int$,

$$m = \frac{z}{\sqrt{m'}},\quad \text{d'où}\quad dm = \frac{-z\, dm'}{2\, m'\sqrt{m'}};$$

ce qui transforme cette formule en

$$(39)\qquad u - u_0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f\left(t - \frac{\rho}{4\varepsilon} m'\right)\left(\frac{z^2}{m'} e^{-\frac{z^2}{m'}}\right)\frac{dm'}{\sqrt{m'}}.$$

Or, dans celle-ci, l'intégrale du second membre reste finie pour z infini; car, d'une part, le facteur $\frac{z^2}{m'}e^{-\frac{z^2}{m'}}$, maximum et égal à $\frac{1}{e}$ pour $\frac{z^2}{m'} = 1$, s'annule aux deux limites de l'intégration; d'autre part, on reconnaît que, même en faisant abstraction de ce facteur, l'intégrale

reste finie quand sa limite inférieure tend vers zéro, finie aussi quand sa limite supérieure devient infinie, à cause du dénominateur croissant $\sqrt{m'}$ et du numérateur $f\left(t - \frac{\rho}{4\varepsilon} m'\right)$, qui est, ou décroissant, ou périodique et aussi souvent négatif que positif. Par suite, le quotient de cette intégrale par z s'annule bien pour z infini.

En résumé, *la formule* (38) *convient tout à la fois au cas d'une intumescence propagée dans un liquide en repos et au cas d'ondes périodiques.*

Si l'on y pose en particulier $f(t) = c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$, son second membre devra devenir identique à celui de (23), d'après ce qui a été démontré au n° **11**. Il faudra donc que les coefficients de

$$c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right),\quad c\sin\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$$

soient respectivement égaux dans les deux formules. En écrivant, pour abréger, $z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} = \beta$, on trouve ainsi :

$$(39\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-m^2}\cos\frac{\beta^2}{2m^2}\,dm = e^{-\beta}\cos\beta,\\ &\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-m^2}\sin\frac{\beta^2}{2m^2}\,dm = e^{-\beta}\sin\beta. \end{aligned}\right.$$

La différentiation de ces intégrales, par rapport à β, conduit à d'autres intégrales intéressantes, qui, si l'on y pose, sous le signe $\int$, $\frac{\beta}{\sqrt{2}\,m} = m'$, $dm = -\frac{\beta\,dm'}{\sqrt{2}\,m'^2}$, deviennent

$$(39\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2m'^2}}\sin.m'^2\,dm' = e^{-\beta}(\cos\beta + \sin\beta),\\ &2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2m'^2}}\cos.m'^2\,dm' = e^{-\beta}(\cos\beta - \sin\beta). \end{aligned}\right.$$

Pour $\beta = 0$, celles-ci conduisent aux résultats bien connus

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin.m'^2\,dm' = 1,\qquad 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos.m'^2\,dm' = 1.$$

16. Évaluons le frottement, $-\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, exercé, à l'époque t, par l'unité d'aire de la paroi et projeté dans le sens des x positifs. La formule (38), différentiée par rapport à z, donne

$$\frac{du}{dz} = \frac{\rho z}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f'\left(t - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)e^{-m^2}\frac{dm}{m^2}.$$

Substituons à m, sous le signe $\int$, une nouvelle variable n, telle que l'on ait

$$\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{1}{m} = n, \quad \text{ou} \quad m = \frac{1}{n}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right), \quad dm = -\frac{dn}{n^2}\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}.$$

La dérivée $\frac{du}{dz}$ deviendra

$$(40) \qquad \frac{du}{dz} = 2\sqrt{\frac{\rho}{\pi\varepsilon}}\int_0^\infty f'(t-n^2)e^{-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon n^2}}dn.$$

Cette expression, prise pour $z = 0$ et multipliée par $-\varepsilon$, donne enfin le frottement extérieur cherché

$$(41) \qquad -\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = -2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty f'(t-n^2)dn.$$

Si l'on demandait la valeur moyenne de ce frottement aux divers instants successifs, il suffirait de remplacer, dans son expression, le facteur $f'(t-n^2)$ par sa moyenne, obtenue en y faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$: cette valeur est nulle quand l'intégrale $\int f'(t-n^2)dt$ ou $f(t-n^2)$, prise entre deux limites assez éloignées, l'est elle-même, comme il arrive lors d'une petite agitation quelconque du liquide, et dans le cas d'une intumescence limitée propagée le long d'un canal. Dans ce dernier cas, la fonction f est de la forme $F\left(t - \frac{x}{\omega}\right)$, ω désignant la vitesse de propagation; et la valeur totale du frottement extérieur, d'un bout de l'intumescence à l'autre bout, vaut, pour l'unité de largeur du canal,

$$-\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{du}{dz}\right)_0 dx = -2\omega\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty dn\int_{-\infty}^{\infty} f'\left(t - \frac{x}{\omega} - n^2\right)\frac{dx}{\omega} = 0.$$

Le travail total détruit par l'influence du frottement extérieur, soit en un même point et aux divers instants successifs, s'il s'agit d'ondes périodiques, soit à un moment déterminé et d'un bout à l'autre de l'onde, s'il s'agit d'une intumescence propagée le long d'un canal, pourra s'évaluer, d'après ce qu'on a vu à la fin du n° 12, comme si la vitesse à la paroi était u_0, et que le frottement extérieur valût le produit de cette vitesse par le coefficient *fictif* de frottement extérieur ε_1 que donne la formule (22 *bis*). Comme on a $u_0 = f(t)$, la relation (41) transformera aisément la valeur (22 *bis*) de ε_1 en celle-ci :

$$(42)\qquad \varepsilon_1 = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty dn \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f'(t-n^2)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt}.$$

17. Pour toutes les ondes et intumescences *analogues*, c'est-à-dire d'une certaine espèce, comme sont toutes les ondes sinusoïdales, toutes les ondes solitaires, etc., la fonction f est de la forme

$$(43)\qquad u_0 \quad \text{ou} \quad f(t) = c\,F(k't - c'),$$

k' désignant une quantité positive, constante en un même point, c et c' deux autres quantités également indépendantes de t, et F une *certaine* fonction, *caractéristique de l'espèce d'ondes*. Alors la formule (42) devient

$$\varepsilon_1 = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon k'}{\pi}}\int_0^\infty dn\sqrt{k'}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(k't-c')F'(k't-c'-k'n^2)k'\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} F(k't-c')^2 k'\,dt}.$$

Adoptons, sous les signes d'intégration, les nouvelles variables

$$\tau = k't - c', \quad \nu = n\sqrt{k'},$$

et posons, pour abréger,

$$(44)\qquad \gamma = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty d\nu \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)F'(\tau-\nu^2)\,d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)^2\,d\tau};$$

cette valeur de ε_1 se trouvera réduite à

$$\varepsilon_1 = \gamma\sqrt{k'}. \tag{45}$$

La quantité γ, constante pour toutes les intumescences analogues, est, en général, d'une évaluation fort difficile, à cause surtout de la complication que présentera l'intégration par rapport à ν. Dans le cas d'ondes sinusoïdales, on a

$$F(\tau) = \cos\tau,$$
$$F(\tau)F'(\tau-\nu^2) = \cos\tau\sin(\nu^2-\tau) = \cos^2\tau\sin\nu^2 - \sin\tau\cos\tau\cos\nu^2:$$

la valeur moyenne du produit $\sin\tau\cos\tau$ ou $\frac{1}{2}\sin 2\tau$ étant nulle, le rapport des deux intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)F'(\tau-\nu^2)d\tau$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)^2 d\tau$ égale simplement $\sin\nu^2$; et la formule (44), vu l'avant-dernière équation de la page 360 ci-dessus, donne

$$\gamma = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin.\nu^2 d\nu = \sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{2}},$$

en sorte que la valeur (45) de ε_1 se confond bien avec celle, (27), qui a été trouvée plus haut, si l'on observe que k' n'est autre alors que $\frac{\pi}{T}$.

18. Quand il s'agit d'ondes solitaires, la vitesse u_0, proportionnelle à la hauteur d'intumescence en chaque endroit, est, d'après les formules (306) et (308) (p. 382) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, de la forme $cF\left(\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{3h'_1}{H^3}}\,t - c'\right)$, H désignant la profondeur primitive moyenne de l'eau dans le canal à l'endroit considéré, h'_1 la hauteur que le sommet de l'onde y présente au dessus de la surface libre primitive, et ω la vitesse de propagation, égale environ à $\sqrt{gH}$. On a donc $k' = \frac{\sqrt{3gh'_1}}{2H}$, et la formule (45) donne alors le coefficient ε_1 proportionnel à $\sqrt{\frac{1}{H}\sqrt{h'_1}}$. D'ailleurs, la formule (317) [p. 387] du même Mémoire montre que h'_1 est en raison inverse de H et en raison directe de la puissance $\frac{2}{3}$ de l'énergie de l'onde par unité de la largeur

l du canal : soit $\frac{\mathcal{E}}{l}$ cette énergie. Le coefficient ε_1, en appelant ε' une constante, sera donc de la forme

$$(46)\qquad \varepsilon_1 = \varepsilon' \frac{\mathcal{E}^{\frac{1}{6}}}{l^{\frac{1}{6}} \mathrm{H}^{\frac{3}{4}}}.$$

Cette valeur ne reste pas constante pendant que l'onde se propage, contrairement à ce que j'avais admis, pour plus de simplicité, dans la deuxième des *Additions* à la théorie des eaux courantes (p. 36); si on la substitue à ε_1 dans la formule du haut de la page suivante (p. 37) des *Additions* dont il s'agit, formule où $\frac{\sigma}{\chi}$ ne diffère pas sensiblement de H, il vient

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\varepsilon'}{\rho \mathrm{H}^{\frac{7}{4}} l^{\frac{1}{6}}} \mathcal{E}^{\frac{7}{6}} = 0.$$

Remplaçons, dans cette formule, l'élément de temps dt par le rapport à $\omega = \sqrt{g\mathrm{H}}$ du chemin dx que parcourt le sommet de l'onde durant l'instant dt, puis multiplions par $\mathcal{E}^{-\frac{7}{6}} \frac{dx}{\omega}$; nous aurons

$$\mathcal{E}^{-\frac{7}{6}} d\mathcal{E} + \frac{\varepsilon' \, dx}{\rho g^{\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{\frac{9}{4}} l^{\frac{1}{6}}} = 0.$$

Observant, enfin, que H, l seront des fonctions données de l'abscisse x du sommet de l'onde, intégrons l'équation, à partir de l'époque $t = 0$ à laquelle on avait, par exemple, $x = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. Nous obtiendrons, pour déterminer l'énergie $\mathcal{E}$ de l'onde aux divers endroits, et, par suite, sa hauteur variable h'_1, la relation

$$(47)\qquad \frac{1}{\sqrt[6]{\mathcal{E}}} - \frac{1}{\sqrt[6]{\mathcal{E}_0}} = \frac{\varepsilon'}{6\rho\sqrt{g}} \int_0^x \frac{dx}{\mathrm{H}^{\frac{9}{4}} l^{\frac{1}{6}}}.$$

L'énergie $\mathcal{E}$ tend sans cesse vers zéro, comme dans le cas où l'on aurait $\varepsilon_1 =$ const.; mais, pour les grandes valeurs de x ou de t, elle décroît moins vite que dans ce cas. En effet, lorsque H, l sont supposés constants, et que, x, t devenant très-grands, le terme $\frac{1}{\sqrt[6]{\mathcal{E}_0}}$

disparaît en comparaison du précédent, $\mathcal{E}$ devient inversement proportionnel à la sixième puissance seulement de x, au lieu d'être en raison inverse de la puissance x du nombre $e^{\frac{\varepsilon_1}{\rho H \omega}}$.

19. Enfin l'analyse exposée dans les numéros précédents (9 à 17) subsisterait sans modification, si la paroi considérée, dont on veut évaluer l'influence retardatrice sur le mouvement d'un fluide qui la mouille, éprouvait de petits déplacements, d'une amplitude bien moindre que l'amplitude des mouvements mêmes du fluide. En effet, celui-ci posséderait alors, contre la paroi, une vitesse et une accélération égales à celles de la paroi même, c'est-à-dire négligeables par hypothèse en comparaison de la vitesse ou de l'accélération de la masse liquide dans le sens tangentiel des x. Les expressions w, w', u, u' n'étant ainsi accrues que de quantités insensibles, rien ne serait changé aux formules (19), ni par suite à l'équation (20) et aux suivantes.

C'est précisément ce qui arrive pour les ondes produites au sein d'une colonne liquide remplissant un tube en caoutchouc, dans le cas ordinaire où la longueur de ces ondes est beaucoup plus grande que le diamètre du tube, et où, par suite, les mouvements sont principalement longitudinaux. M. Resal a étudié le premier ce problème intéressant, dans un article du 27 mars 1876 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII, p. 698). Son analyse suppose, il est vrai, que les portions de tube comprises entre des sections normales consécutives n'exercent les unes sur les autres que des actions négligeables, ainsi que je l'ai remarqué à la page 59 des *Additions* au Mémoire sur la théorie des eaux courantes, où je déduis les lois de ces ondes de celles des ondes propagées le long des canaux. Mais cette hypothèse est parfaitement légitime lorsque le tube n'est pas tendu ou que sa longueur totale dépasse un peu la distance de ses deux extrémités; on voit en effet que la force élastique exercée, à un moment quelconque, sur une section normale du tube, est alors insignifiante en comparaison de celle qui est appliquée à une section diamétrale et qui résiste à la pression intérieure du liquide. Quand, en particulier, la vitesse à l'intérieur, u_0, varie pendulairement, c'est-à-dire a une expression de la forme $c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$, le coefficient fictif de frottement

extérieur ε_1 qu'il faut choisir est celui que donne la formule (27),

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi \zeta \varepsilon}{2T}};$$

et le coefficient d'extinction se calcule comme pour une longue houle propagée le long d'un canal. La formule du haut de la page 37 des *Additions* montre que le frottement absorbe, par unité de temps, une fraction de l'énergie des ondes égale à $\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma}$, $\frac{\sigma}{\chi}$ désignant le rayon moyen du tube. L'énergie $\mathcal{E}$ sera donc proportionnelle à $e^{-\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma} t}$ dans le cas d'un clapotis, c'est-à-dire d'ondes oscillant sur place. S'il s'agit au contraire d'ondes courantes, les raisonnements de la page 53 des *Additions* prouvent que chaque onde, suivie dans son mouvement, perdra par unité de temps la fraction $\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma}$ de son énergie, ou, par unité du chemin x parcouru, la fraction $\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma \omega}$ de cette énergie : celle-ci, aux divers points du trajet de l'onde, sera donc proportionnelle à $e^{-\int_0^x \frac{\varepsilon_1 \chi dx}{\rho \sigma \omega}}$.

§ III. — *Complément au* § XIV *de l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes : *Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide, quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque.*

20. Quand une masse fluide s'écoule d'un mouvement permanent suivant une certaine direction, mais dans des conditions telles, que sa section normale, après avoir été sensiblement constante, grandisse rapidement d'amont en aval et devienne de nouveau constante, il y a, comme on sait, une portion plus ou moins grande de son énergie (ou de sa *charge*) qui se transforme en tourbillonnements et se trouve perdue pour l'écoulement ultérieur. M. Belanger a montré que de telles pertes de charge s'évaluent en appliquant le principe des quantités de mouvement, suivant la direction de l'écoulement, au liquide compris entre l'une, σ_0, des dernières sections fluides précédant l'épa-

nouissement des filets, et, l'une, σ_1, des premières sections qui suivent le même épanouissement. La pression varie hydrostatiquement sur chacune de ces sections; car la deuxième, σ_1, est occupée tout entière par des filets sensiblement rectilignes et parallèles, qui la traversent, normalement, avec des vitesses dont j'appellerai U_1 la moyenne, et la première, σ_0, se compose d'une partie (*section vive*) traversée de même normalement par des filets sensiblement rectilignes et parallèles, avec des vitesses dont U_0 désignera la moyenne, et d'une autre partie où le fluide est *mort*, c'est-à-dire relativement stagnant. D'ailleurs, dans les cas où la divergence des filets liquides est précédée et résulte d'un changement des dimensions transversales du lit solide qui les contient, on suppose ce changement assez brusque pour qu'il se termine au plus tard, sur la section σ_0, du côté de l'aval, c'est-à-dire pour que la paroi soit cylindrique entre les deux sections σ_0, σ_1, ou, du moins, puisse être rendue telle sans modifier l'écoulement : cela exige qu'elle ne se trouve en contact qu'avec du fluide *mort* aux endroits où elle s'écarterait de la forme cylindrique, laquelle sera expressément supposée dans l'évaluation de l'aire de σ_0.

Dans ces conditions, et en admettant, pour simplifier, que l'axe du lit soit horizontal, la somme des actions extérieures à considérer sera l'excès de la pression P_0, supportée, *suivant l'axe du canal*, par toute la section σ_0 *et par la surface libre* (quand il y en a une), sur la pression aussi totale, P_1, qu'éprouve la section σ_1, et sur le frottement des parois (que rend sensible l'épanouissement même des filets). Quant à l'accroissement égal (par unité de temps) de la quantité de mouvement que possède la masse fluide, il est le produit de la densité ρ par la dépense $Q = U_1\sigma_1$ et par $U_1 - U_0$, si l'on attribue aux divers filets fluides les mêmes vitesses. On aurait donc $\rho Q(U_0 - U_1) = P_1 - P_0$, sans le frottement extérieur et sans l'inégalité de vitesse des filets. J'ai montré, au § XIV (n° 53) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, qu'on tient assez bien compte de tout en posant

$$\rho U_1\sigma_1(\alpha'_0 U_0 - \alpha'_1 U_1) = P_1 - P_0, \tag{48}$$

où α'_0, α'_1 désignent les valeurs respectives que reçoit, sur les sections

σ_0, σ_1, un coefficient α' (variable dans les divers cas de 1 à 1,15 environ), exprimant, dans toute section vive, l'excès de deux fois le cube moyen du rapport des vitesses des divers filets à la vitesse moyenne sur le carré moyen du même rapport.

Pour évaluer $P_1 - P_0$, appelons respectivement p_1 et p_0 les pressions, par unité superficielle, aux points les plus hauts de σ_1 et σ_0, pressions qui se transmettent sur toute la section correspondante *et qui s'exercent sur la surface libre contiguë* quand il y en a une : elles donnent en tout, dans $P_1 - P_0$, le produit $(p_1 - p_0)\sigma_1$, somme des trois termes $p_1\sigma_1$, $-p_0\sigma_0$, $-p_0(\sigma_1 - \sigma_0)$, provenant des pressions exercées respectivement sur la section σ_1, sur la section σ_0 et (quand σ_1 est plus grand que σ_0) sur la surface libre adjacente à σ_0. Il faut y joindre, en appelant h l'élévation du niveau du liquide entre σ_0 et σ_1, le terme $\rho g h \sigma_0$, différence des pressions hydrostatiques exercées sur la section σ_0 et sur la partie pareille de σ_1, plus la pression hydrostatique supportée par la partie supérieure, $\sigma_1 - \sigma_0$, de σ_1, savoir $\frac{\rho g h}{1+m}(\sigma_1 - \sigma_0)$, $\frac{h}{1+m}$ désignant la distance verticale, au sommet de cette partie $\sigma_1 - \sigma_0$, de son centre de gravité, en sorte que m est un nombre positif, d'autant plus grand que la *largeur à fleur d'eau* l, entre σ_0 et σ_1, croît relativement plus, et *qui vaudrait* 1, *soit pour* l *constant, soit pour* h *très-petit*. L'équation (48), résolue par rapport à h, deviendra ainsi

$$(49) \qquad h = \frac{(1+m)\sigma_1}{\sigma_1 + m\sigma_0}\left[\frac{p_0 - p_1}{\rho g} + \frac{U_1(\alpha'_0 U_0 - \alpha'_1 U_1)}{g}\right].$$

21. Remplaçons $(1+m)\sigma_1$ par $(\sigma_1 + m\sigma_0) + m(\sigma_1 - \sigma_0)$, de manière à dédoubler le second membre et à pouvoir isoler $\frac{p_0 - p_1}{\rho g} - h$, qui, *joint à* $\frac{\alpha'_0 U_0^2 - \alpha'_1 U_1^2}{2g}$, donne la perte de charge. Cette perte vaudra, en substituant à la grande parenthèse de (49) sa valeur tirée de (49),

$$(50) \qquad \text{perte de charge} = \frac{\alpha'_0 (U_0 - U_1)^2 + (\alpha'_1 - \alpha'_0) U_1^2}{2g} - \frac{mh(\sigma_1 - \sigma_0)}{(1+m)\sigma_1}.$$

Sous cette forme, elle convient pour un liquide coulant le long d'un tuyau, dans le cas, laissé jusqu'ici de côté par les traités clas-

siques, où le tuyau n'est plein qu'après l'épanouissement des filets fluides. Elle montre aussi, en y faisant, pour simplifier, $\alpha'_0 = 1$, $\alpha'_1 = 1$, que la formule de Borda donne des pertes de charge trop fortes, si ce n'est quand l'accroissement $\sigma_1 - \sigma_0$ de la section fluide totale, entre σ_0 et σ_1, est insignifiant par rapport à celui de la section vive.

Si l'on n'avait pas remplacé la grande parenthèse de (49) par sa valeur, mais qu'on eût posé $\alpha'_0 = \alpha'_1 = \alpha'$, quelques réductions auraient conduit à la relation

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{Perte de charge} = & \frac{\alpha' m (U_0 - U_1)(U_0\sigma_0 - U_1\sigma_1)}{g(\sigma_1 + m\sigma_0)} \\ & + \frac{\alpha'(U_0 - U_1)^2}{2g}\frac{\sigma_1 - m\sigma_0}{\sigma_1 + m\sigma_0} + \frac{m(\sigma_1 - \sigma_0)}{\sigma_1 + m\sigma_0}\frac{p_1 - p_0}{\rho g}. \end{aligned} \right.$$

Le second membre se réduit : 1° pour un tuyau plein de liquide (où $\sigma_0 = \sigma_1$), au produit de α' pour ce que donne la formule de Borda ; 2° pour un ressaut (où $p_0 = p_1$, $U_0\sigma_0 = U_1\sigma_1$), à ce même produit, multiplié par $\frac{\sigma_1 - m\sigma_0}{\sigma_1 + m\sigma_0} = \frac{U_0 - mU_1}{U_0 + mU_1}$; 3° quand on a seulement $p_1 = p_0$, ou qu'une surface libre relie les deux sections σ_0, σ_1, aux deux premiers termes ; et 4° enfin, aux deux derniers quand $U_0\sigma_0 = U_1\sigma_1$, comme lorsqu'il s'agit d'un tuyau où le liquide entre librement par la section σ_0 en ne le remplissant qu'aux approches de la section σ_1. Les termes ainsi obtenus, dans le premier cas, se réduisent à un carré, et, dans les trois autres cas, sont également tous positifs (du moins pour $m \overline{<} 1$, c'est-à-dire quand h est très-petit ou encore quand la largeur à fleur d'eau l ne croît pas à mesure que le niveau monte) ; cela résulte des hypothèses $U_0 > U_1$, $U_0\sigma_0 \overline{>} U_1\sigma_1$ et de la formule (49) (donnant $h > 0$, $\sigma_1 > \sigma_0$ dans un canal découvert) ou, s'il s'agit d'un tuyau, de ce fait que p_1 y dépasse p_0, vu que l'excès de vitesse s'y change partiellement en pression sur la section σ_1.

Nous bornant au cas $p_1 = p_0$, mettons, dans (51), $U_0 - U_1$ en facteur commun ; puis remplaçons ce facteur et, finalement, U_0 par leurs valeurs tirées de (49) et de la relation $\mu\sigma_0 U_0 = \sigma_1 U_1$, où μ désigne le rapport, sur la section σ_0, de la partie vive à l'aire totale. Il viendra

$$(52)\quad \text{Perte de charge} = \frac{h}{2(1+m)}\left[\left(\frac{\sigma_1}{\mu\sigma_0} - 1\right)\left(1 - \frac{m\sigma_0}{\sigma_1}\right) + 2m\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\right].$$

Pour un simple ressaut, $\mu = 1$, et cette expression, si les sections σ_0, σ_1 sont des rectangles ayant les hauteurs h_0, h_1, prend la forme connue $\frac{h^3}{4 h_0 h_1}$.

Quand la largeur à fleur d'eau l est constante, ou que $m = 1$, l'élévation h du niveau entre σ_0 et σ_1 vaut le quotient $\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{l}$, et la formule (52) devient aisément identique à celle que j'ai donnée au n° 60 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 137)

$$\text{Perte de charge} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0)\left[(\sigma_1 - \mu\sigma_0)^2 + (1 - \mu)\sigma_0(\sigma_1 + \mu\sigma_0)\right]}{4\mu\sigma_0\sigma_1 l} \; [*].$$

§ IV. — *Modification à introduire dans une Note complémentaire du Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides.*

22. La méthode indiquée dans la Note I, à la fin du Mémoire *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, et dont le but est d'établir pour ces mouvements les formules des composantes N, T des pressions, a besoin d'être complétée lorsqu'on l'applique à la recherche des termes en $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ qui sont d'un degré supérieur au premier. La deuxième condition qui s'y trouve énoncée, celle qui se déduit de ce fait que nul mouvement d'ensemble du fluide ne développe de pression sur aucun élément plan, n'est pas complétement exprimée quand on dit qu'une simple rotation autour d'un axe quelconque doit laisser les N égaux à la pression non dynamique changée de signe, $-p$, et les T égaux à zéro. Dès que les formules que l'on veut établir ne sont pas linéaires, il faut entendre cette condition dans son sens général, c'est-à-dire en ce sens que la superposition d'un mouvement d'ensemble quelconque à tout autre mouvement laisse les composantes N, T égales à ce qu'on aurait si ce dernier mouvement était seul. En d'autres termes, et comme il est permis de faire abstraction d'une simple translation qui n'influerait

[*] J'observerai, à ce propos, qu'il se produit de petites pertes de charge quand les filets fluides, au lieu de diverger, se contractent notablement, quoique, dans ce cas, le

pas sur les dérivées en x, y, z des vitesses, les N, T doivent rester les mêmes lorsqu'on remplace respectivement dans leurs expressions les trois composantes u, v, w de la vitesse par celles-ci,

$$U = u + \omega' z - \omega'' y,\quad V = v + \omega'' x - \omega z,\quad W = w + \omega y - \omega' x,$$

résultant de leur composition avec trois vitesses angulaires de rotation ω, ω', ω'' autour des trois axes coordonnés. Or on peut supposer

---

passage d'une petite vitesse, ayant U_0 pour moyenne sur la section amont σ_0, à une vitesse finale beaucoup plus grande U_1 (commune à tous les filets), se fasse sans perte sensible de force vive pour chaque filet et que, par suite, d'après une démonstration du n° 216 (p. 588) de l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes*, on ait alors

$$\frac{U_1^2}{2g} = \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} - h.$$

En effet, si l'on porte cette valeur de $\frac{U_1^2}{2g}$ dans l'expression $\alpha'_0 \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} - h$, laquelle, *par définition* et à cause de $\alpha'_1 = 1$, exprime la perte de charge éprouvée, il vient, pour celle-ci, $(\alpha'_0 - \alpha_0)\frac{U_0^2}{2g} =$ environ $\eta \frac{U_0^2}{g}$, η (variable de 0,02 à 0,03 environ) désignant l'excès, sur l'unité, du carré moyen du rapport des vitesses des divers filets dans la section d'amont σ_0 à leur moyenne U_0.

Il est bon de remarquer aussi que la formule (50) ci-dessus indique une certaine perte de charge, assez sensible, aussitôt après l'entrée d'un tuyau, partout plein, où l'on suppose que l'eau, sortant d'un réservoir, arrive sans contraction, grâce à un évasement convenable des parois qui conduisent à l'orifice. En effet, dans ce cas, les vitesses des divers filets sont les mêmes à cet orifice, en sorte qu'on a $\alpha'_0 = 1$; mais la valeur de α' sur la section située un peu plus en aval, σ_1, est celle qui correspond à la véritable distribution des vitesses dans le tuyau. Comme, d'ailleurs, par hypothèse, la vitesse moyenne U_0, à l'entrée, ne diffère pas alors de U_1, le second membre de la formule (50) devient

$$(\alpha' - 1)\frac{U^2}{2g},$$

où U désigne la vitesse moyenne dans le tuyau et α' la valeur de ce coefficient à l'intérieur du tuyau même. Cette perte de charge n'a rien d'invraisemblable; car on conçoit que le passage, d'un état où tous les filets fluides ont même vitesse, à un autre où ils ont des vitesses différentes, détermine une déperdition notable d'énergie, même quand la vitesse moyenne n'éprouve pas de diminution.

que $\omega, \omega', \omega''$ soient pris respectivement égaux aux valeurs qu'ont les trois dérivées $-\frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dx}, -\frac{dv}{dx}$ en un point particulier considéré. Alors les trois dérivées $\frac{dV}{dx}, \frac{dW}{dx}, \frac{dW}{dy}$ y seront nulles, et les N, T ne dépendront que des six autres dérivées

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dW}{dz}, \quad \frac{dV}{dz}, \quad \frac{dU}{dz}, \quad \frac{dU}{dy},$$

égales respectivement à

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz}, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

La condition dont il s'agit, lorsque u, v, w désignent les composantes, variant avec continuité, de la vitesse d'un fluide au point (x, y, z) de l'espace, revient par conséquent à dire que les N, T ne peuvent dépendre de ces composantes que par les six vitesses actuelles d'extension et de glissement, $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \cdots, \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, de trois lignes matérielles parallèles aux axes et se croisant au point considéré. Ainsi entendue, elle conduit à annuler les coefficients A, C des formules que contiennent les deux dernières pages du Mémoire cité [*].

25. M. Kleitz s'est également occupé, au § 56 (p. 148) de ses *Études sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement* (Paris, 1873), de déterminer, dans les expressions des forces N, T pour le cas où les vitesses u, v, w sont bien continues, les termes en $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ qui sont d'un degré supérieur au premier : il croit pouvoir leur attribuer une grande influence. Mais ces termes se trouvent avoir des coefficients si petits, en comparaison de celui, ε, qui paraît dans la

---

[*] Je prie aussi le lecteur de remarquer que, dans le § XII du même Mémoire, la constante c désigne simplement la dérivée $\frac{-dp}{dx}$ et non, comme au § XI, le quotient de cette dérivée par le coefficient de frottement intérieur.

partie linéaire des N, T, que les expériences du Dr Poiseuille, où cependant les dérivées $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ ont atteint d'énormes valeurs, n'ont pu seulement en faire soupçonner l'existence. Une équation donnée par M. Kleitz lui-même vers le tiers de la page 198 de son Mémoire, lorsqu'on y compare attentivement les deux premiers termes de la série qui y paraît (sans tenir même compte des observations *directes* montrant que, dans les tubes capillaires mouillés, la vitesse croît graduellement depuis la paroi où elle est nulle jusqu'à l'axe où elle est maximum), prouve que ces coefficients doivent être des fractions excessivement petites de ε pour n'avoir pas complétement altéré les lois de M. Poiseuille [*].

Les formules de M. Kleitz pourraient plutôt s'appliquer aux pressions effectives produites, *à chaque instant*, en divers points d'une eau animée de mouvements tumultueux ou peu continus, pressions qu'elles exprimeraient en fonction des dérivées premières des vitesses *vraies*, essentiellement différentes de leurs *moyennes locales* que considèrent

---

[*] En vue d'expliquer ces lois sans admettre la nullité (constatée pourtant) de la vitesse près d'une paroi mouillée, M. Kleitz a cru pouvoir, à la page suivante, 199, de ses *Études*, attribuer aux actions moléculaires qui produisent le frottement mutuel du fluide et de la paroi un rayon d'activité comparable au diamètre des petits tubes; il a pensé qu'il ne serait pas impossible que de telles actions produisissent, sur la masse fluide contenue dans l'unité de longueur d'un tube pareil, une résistance *totale* indépendante du contour mouillé et uniquement proportionnelle à la vitesse moyenne, comme l'exigent les expériences de Poiseuille. Mais comment accepter que le rayon d'activité des actions moléculaires, rayon que tous les faits de la Physique tendent à faire supposer absolument imperceptible, soit comparable à une longueur de 3 centimètres environ, ce qui est le diamètre de tubes polis dans lesquels Darcy a reconnu que les lois de Poiseuille s'observaient tant que la vitesse moyenne ne dépassait pas 1 décimètre? Et s'il était vrai que le rayon d'activité fût aussi grand, ce qui rendrait inabordables les problèmes les plus simples relatifs à l'écoulement dans ces tubes (puisque les pressions ne pourraient plus être rapportées à l'unité d'aire, ni même être considérées comme s'exerçant sur des surfaces), il y a toute apparence que des actions si complexes ne produiraient pas des phénomènes régis par les lois simples et précises de Poiseuille. Comment d'ailleurs s'expliquer le changement presque brusque qu'éprouve le mode d'écoulement dans les mêmes tubes au moment où la vitesse moyenne dépasse une certaine limite, si ce n'est en observant que des mouvements de

seules les hydrauliciens. Toutefois, il est encore plus probable que, dans ce cas de mouvements tumultueux ou tourbillonnants, les vitesses vraies dont il s'agit varient assez rapidement d'un point à l'autre pour que, dans le développement par la série de Taylor (s'il continue à être possible) de la vitesse relative de deux molécules agissant l'une sur l'autre, il faille tenir compte des termes de degré supérieur qui contiennent les dérivées partielles secondes, troisièmes, etc., de u, v, w par rapport à x, y, z. Alors, les forces N, T, en admettant qu'elles pussent encore être développées en séries, suivant les puissances croissantes des *grandes* variables dont elles dépendent (c'est-à-dire de telles vitesses relatives), contiendraient, non-seulement les termes, affectés des dérivées premières de u, v, w, auxquels M. Kleitz se borne, mais aussi d'autres termes, où paraîtraient les dérivées d'ordre supérieur de u, v, w et dont M. Maurice Lévy, dans un Mémoire [*] *Sur l'hydrodynamique des liquides homogènes*, a considéré ceux qui sont du premier degré [**].

---

ballottement dans les sens transversaux, mouvements inévitables croissant avec le rayon moyen qui mesure l'étendue du champ dans lequel ils peuvent se développer, rendent l'écoulement tourbillonnant ou tumultueux dès que les chocs qui en résultent contre les parois sont capables, grâce à une vitesse de translation assez grande, de produire des glissements sensibles entre couches fluides contiguës?

Enfin M. Kleitz, pour n'admettre de tels glissements finis que près des parois mouillées, dans les écoulements par des tubes, tuyaux ou canaux, attribue aux fluides en mouvement une *cohésion* d'une autre nature et d'un ordre de grandeur plus élevé que les frottements proprement dits de couches glissant l'une sur l'autre. Mais toute *cohésion* est une force qui subsiste à l'état statique, tandis qu'on n'en voit pas trace dans les liquides non visqueux et dans les gaz en repos. La *tension superficielle* des liquides réside uniquement dans une couche extrêmement mince qui les enveloppe : elle a été trouvée, pour les lames liquides les plus minces qu'on ait pu produire (c'est-à-dire d'une épaisseur comparable à $0^{mm},0001$), aussi grande que pour les plus épaisses.

[*] Voir au sujet de ce Mémoire, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXVIII, p. 585) un Rapport de M. de Saint-Venant en date du 8 mars 1869; et au t. LXXIV (p. 655 et 693), les nos 8 et 9 d'un Mémoire *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau*, aussi de M. de Saint-Venant, février et mars 1872.

[**] M. Kleitz vient de publier, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1877, 2e semestre, t. XIV) un Mémoire (*Sur la théorie du mouvement non permanent des liquides et sur son application à la propagation des crues des rivières*) où se trouvent con-

signés des résultats intéressants et nouveaux. Il y déduit, notamment, de l'équation de continuité

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dQ}{ds} = 0,$$

une corrélation très-simple, entre deux faits que j'avais démontrés au § XXXVII de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 453 et 457) sans remarquer leur liaison intime : ces deux faits sont, d'une part, la non-simultanéité, dans toute crue, du débit maximum et de la hauteur d'eau maximum sur chaque section; d'autre part, l'aplatissement de l'onde ou la diminution de ce débit maximum, quand on passe d'une section à l'autre en allant de l'amont vers l'aval. En effet, la différentielle du débit maximum considéré est $\frac{dQ}{ds}ds + \frac{dQ}{dt}dt$, c'est-à-dire simplement $\frac{dQ}{ds}ds$ ou $-\frac{d\sigma}{dt}ds$, puisque $\frac{dQ}{dt}$ s'annule sur la section proposée au moment où le débit s'y trouve maximum. Si cette différentielle est négative, on a bien $\frac{d\sigma}{dt} > 0$, à l'endroit proposé, au moment où $\frac{dQ}{dt}$ s'y annule. Donc la section fluide σ est encore en train de grandir quand le débit est maximum. M. Kleitz a pu ainsi, du fait, reconnu par l'expérience, de l'aplatissement graduel des crues, déduire celui du retard des maxima et minima de section fluide en chaque endroit sur les maxima ou minima pareils de dépense. On pourrait de même, du fait de l'abaissement graduel du sommet d'une crue, abaissement en vertu duquel, pour $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, on a $d\sigma = \frac{d\sigma}{dt}dt = -\frac{dQ}{ds}dt < 0$, déduire cet autre fait que le maximum du débit à un moment donné se produit à quelque distance en avant du sommet considéré : effectivement, il en résulte $\frac{dQ}{ds} > 0$ à l'endroit où $\frac{d\sigma}{ds} = 0$.

J'ai démontré, dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, qu'il y a en général aplatissement graduel, soit dans le cas d'une onde propagée le long d'un canal où les filets fluides sont animés de vitesses différentes (§ XXXVI, p. 446), soit dans celui d'une crue produite assez rapidement (§ XXXVII, p. 453); soit même, à une deuxième approximation, dans le mouvement quasi-permanent [§ XXXIX, p. 482, formule (425), d'où se déduisent, par la différentiation, une valeur de $\frac{d\sigma}{dt}$ positive quand $\frac{dQ}{dt} = 0$ et une valeur de $\frac{d\sigma}{ds}$ négative quand $\frac{dQ}{ds} = 0$].

M. Kleitz donne encore, dans le Mémoire cité, des expressions générales des vitesses de propagation de chaque valeur de Q, de chaque valeur de $\frac{dQ}{dt}$, de chaque valeur de

$\frac{dQ}{ds}$, de chaque valeur de $\frac{d\sigma}{ds}$, ... La seconde de ces vitesses de propagation, par exemple, qu'il applique au cas où $\frac{dQ}{dt} = 0$, c'est-à-dire à la propagation du maximum de débit local, s'obtient en tirant $\frac{ds}{dt}$ de l'équation $d\frac{dQ}{dt} = 0$, ou

$$\frac{d^2 Q}{ds\,dt} ds + \frac{d^2 Q}{dt^2} dt = 0;$$

si l'on y remplace $\frac{dQ}{ds}$ par $-\frac{d\sigma}{dt}$, cette vitesse devient le rapport des deux dérivées $\frac{d^2 Q}{dt^2}$, $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$. Ce que M. Kleitz entend par la vitesse de propagation du maximum ne se confond donc avec aucune vitesse de propagation d'un débit Q, contrairement à ce que, faute d'indications, j'avais cru en rédigeant une Note insérée dans l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes* (p. 474).

Sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série ;

PAR M. G. DARBOUX.

DEUXIÈME PARTIE.

VIII.

Revenons aux polynômes de la série hypergéométrique et rappelons quelques-unes de leurs propriétés qui sont connues, ou dont on trouvera facilement la démonstration.

Voici d'abord différents développements de ces polynômes :

$$(1)\quad \begin{cases} X_n = 1 - \dfrac{n(\alpha+n)}{1.\gamma}x + \ldots + (-1)^n \dfrac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+2n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n \\ \quad = F(-n, \alpha+n, \gamma, x), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} X_n = (1-x)^n - \dfrac{n(n+\alpha-\gamma)}{1.\gamma}x(1-x)^{n-1} + \ldots \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{(\alpha+n-\gamma)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}x^n \\ \quad = (1-x)^n F\left(-n, \gamma-\alpha-n, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

$$(3)\quad X_n = (-1)^n \frac{(n+\alpha-\gamma)\ldots(1+\alpha-\gamma)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)} F(-n, \alpha+n, \alpha-\gamma+1, 1-x).$$

On a, en particulier,

$$(4)\qquad X_n(1) = (-1)^n \frac{(n+\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{\gamma.(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

valeur qui n'est égale à 1 que si $\alpha - \gamma = \gamma - 1$ et, dans ce cas, la comparaison des développements précédents montre que le polynôme ne change pas de valeur absolue, si l'on change x en $1 - x$. La valeur approchée pour n très-grand de $X_n(1)$ est

$$(5) \qquad X_n(1) = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)}{\Gamma(\gamma)} n^{\alpha - 2\gamma + 1},$$

valeur qui peut être nulle, très-grande ou très-petite. Ainsi l'on voit que, dans le voisinage de la valeur $x = 1$, l'ordre varie brusquement. Le polynôme qui était de l'ordre de $n^{\frac{1}{2} - \gamma}$ devient de celui de $n^{\alpha - 2\gamma + 1}$. Par exemple, si $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$, il est fini pour toute valeur fixe de x comprise entre zéro et 1, et il devient infiniment grand pour $x = 1$.

Les développements, ou l'équation différentielle, montrent que tout est symétrique par rapport aux deux limites. On peut changer x en $1 - x$, pourvu qu'on échange $\gamma - 1$ et $\alpha - \gamma$: l'équation différentielle demeure la même. Cette remarque nous servira souvent à abréger les discussions.

On a, entre trois polynômes consécutifs, la relation

$$(6) \quad \frac{(n + \alpha)(n + \gamma)}{2n + \alpha + 1}(X_{n+1} - X_n) + (2n + \alpha) x X_n + \frac{n(n + \alpha - \gamma)}{2n + \alpha - 1}(X_{n-1} - X_n) = 0,$$

qui est généralement du troisième degré en n ; mais ce degré s'abaisse dans certains cas.

D'abord, si $\alpha = 1$, elle devient

$$(n + \gamma)(X_{n+1} - X_n) + 2(2n + 1) x X_n + (n + 1 - \gamma)(X_{n-1} - X_n) = 0.$$

En second lieu, si l'on a $\alpha = 2\gamma - 1$, elle devient

$$\frac{n + \alpha}{2}(X_{n+1} - X_n) + (2n + \alpha) x X_n + \frac{n}{2}(X_{n-1} - X_n) = 0 ;$$

enfin, si $\alpha = 2\gamma$,

$$\frac{n + 2\gamma}{2n + 2\gamma + 1}(X_{n-1} - X_n) + 2 x X_n + \frac{n}{2n + 2\gamma - 1}(X_{n-1} - X_n) = 0.$$

Dans tous les autres cas, elle reste du troisième degré.

D'ailleurs, de l'identité

$$\frac{d^p}{dx^p}F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)} \times \beta.(\beta+1)\ldots(\beta+p-1) \times F(\alpha+p,\beta+p,\gamma+p,x)$$

on déduit

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^pX_n}{dx^p} &= \frac{x^{1-\gamma-p}(1-x)^{\gamma-\alpha-p}(-1)^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} \\ &\quad \times \frac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)}\,\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\,x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}, \end{aligned} \right.$$

relation bien connue pour les fonctions de Legendre.

Citons encore les identités suivantes :

$$(8)\qquad nX_n - x\frac{dX_n}{dx} = nX_{n-1} + \frac{n}{n+\alpha-1}\,x\frac{dX_{n-1}}{dx},$$

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} (\gamma+n)X_{n+1} &= x(1-x)\frac{2n+\alpha+1}{n+\alpha}\frac{dX_n}{dx} \\ &\quad + X_n[(n+\gamma) - x(2n+\alpha+1)], \end{aligned} \right.$$

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} (\gamma+n)\frac{dX_{n+1}}{dx} &= \frac{n+1}{n+\alpha}[n+\alpha-\gamma+1-(2n+\alpha+1)x]\frac{dX_n}{dx} \\ &\quad - (n+1)(2n+\alpha+1)X_n, \end{aligned} \right.$$

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(n+1)(n+\alpha-1)\int X_n\,dx \\ &\quad + \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)(n+\alpha-1)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}X_{n+1} - \frac{n(n+1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}X_{n-1} \\ &\quad + (2n+\alpha)[n(2\gamma-\alpha-1)+1-\alpha^2]X_n = 0. \end{aligned} \right.$$

Une formule intéressante résulte du développement de $\frac{dX_n}{dx}$ suivant les fonctions X_n. Posons

$$\frac{dX_n}{dx} = A_0X_0 + \ldots + A_{n-1}X_{n-1}.$$

Si nous multiplions les deux membres par $X_p x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$ et que

nous intégrions entre o et 1, nous aurons

$$A_p J_p = \int_0^1 X_p \frac{dX_n}{dx} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx.$$

Substituons l'expression de $\frac{dX_n}{dx}$ déduite de la formule (7), nous aurons

$$J_p A_p = -\frac{n(\alpha+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} \int \frac{X_p}{x(1-x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}] dx.$$

Décomposons en fractions simples $\frac{X_p}{x(1-x)}$, nous aurons

$$\frac{X_p}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha_p}{1-x} + U_{p-2}, \quad \alpha_p = \frac{(-1)^p \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+p)} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+p+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)},$$

U_{p-2} désignant un polynôme de degré $p-2$. En intégrant par partie jusqu'à ce que la dérivée $n-1^{\text{ième}}$ ait disparu sous le signe d'intégration, U_{p-2} disparaîtra, et il restera

$$A_p J_p = -\frac{n(\alpha+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} \int_0^1 [x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma} + (-1)^{p-1} \alpha_p x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}] dx.$$

En remplaçant les intégrales eulériennes par leurs valeurs, on trouve l'expression de A_p, et l'on obtient la formule

$$(12) \quad \frac{dX_n}{dx} = -\frac{J_n(2n+\alpha)}{J_p} \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{X_p}{J_p} + (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(p+1)} (2p+\alpha) X_p.$$

En combinant cette formule avec celle qu'on obtient en y changeant n en $n+1$, on trouve

$$(13) \quad \frac{n+1}{\alpha+n} \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} = -J_n \frac{(n+1)(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}{(n+\alpha)(n+\gamma)} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{X_p}{J_p}.$$

Les polynômes X_n formant, d'après l'équation aux différences à laquelle ils satisfont, une suite de Sturm, on peut leur appliquer la for-

mule fondamentale de mon *Mémoire sur le théorème de Sturm* [*], et l'on obtient la relation

$$(14)\quad \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{J_n(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}\,\frac{Z_n X_{n+1}-X_n Z_{n+1}}{z-x}=\frac{X_0 Z_0}{J_0}+\frac{X_1 Z_1}{J_1}+\ldots+\frac{X_n Z_n}{J_n},$$

Z_p désignant ce que devient X_p quand on y remplace x par z. Telle est la réunion des formules les plus essentielles de cette théorie. Elles ne nous seront pas toutes utiles; mais j'ai cru devoir les calculer et les réunir ici.

Je ferai remarquer que la démonstration de la formule (12) repose sur la considération d'intégrales qui n'ont un sens que si l'on a $\gamma > 0$, $\alpha - \gamma + 1 > 0$; mais le résultat, évidemment indépendant de ces hypothèses, subsiste dans tous les cas.

Parmi ces polynômes, un groupe spécial se rapproche plus particulièrement de ceux de Legendre : ce sont ceux pour lesquels on a

$$\alpha - \gamma = \gamma - 1.$$

Ils admettent d'abord une fonction génératrice spéciale, et l'on a, en posant $z = 1 - 2x$,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} (1-2hz+h^2)^{\frac{1}{2}-\gamma} &= \sum 4^n h^n \frac{(\gamma-\frac{1}{2})\ldots(\gamma+n-\frac{1}{2})}{(2\gamma+n-1)\ldots(2\gamma+2n-2)} \\ &\quad \times x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\gamma}\frac{d^n}{dx^n}[x(1-x)]^{n+\gamma-1}. \end{aligned} \right.$$

Beaucoup des méthodes applicables aux polynômes de Legendre subsistent pour ces polynômes et non pour les polynômes généraux. Par exemple, en posant $x = \sin^2\varphi$, on peut les développer suivant les cosinus des multiples de φ. La relation entre trois polynômes consécutifs est du premier degré par rapport à n, etc.

---

[*] *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VIII, p. 92.

IX.

Nous sommes maintenant en mesure de traiter d'une manière complète la théorie d'une classe de développements en série, de ceux qui sont ordonnés suivant les polynômes X_n que nous venons d'étudier. Nous avons vu que, si l'on suppose

$$\gamma > 0, \quad \alpha - \gamma + 1 > 0,$$

on a

$$\int_0^1 X_m X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = 0, \quad \int_0^1 X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = J_n.$$

La valeur de J_n a été donnée à l'article VII.

Ces points étant admis, étant donnée une fonction quelconque $f(x)$ continue ou discontinue, supposons qu'on se propose de la développer en une série de la forme suivante :

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots.$$

Si nous multiplions les deux membres par $X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx$, et que nous intégrions entre les limites 0 et 1, nous aurons

$$(16) \qquad A_n J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n f(x) dx.$$

Tous les coefficients seront successivement déterminés par cette formule.

Un artifice particulier permet de simplifier, dans bien des cas, la recherche et le calcul de tous les coefficients A_n.

Reprenons l'équation du second degré

$$y = x + ty(1-y)$$

et le développement

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x} &= \sum \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma} \\ &= \sum \frac{t^n \Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)} X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}, \end{aligned} \right.$$

auquel elle donne naissance, et qui est convergent pour des valeurs suffisamment petites de t. Si nous multiplions par $f(x)dx$, et que nous intégrions entre les limites zéro et 1, nous aurons, en nous rappelant la formule (16),

$$\int_0^1 f(x)dx\, y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$= \sum A_n \frac{t^n\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)} A_n J_n = \sum A_n \frac{t^n\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}.$$

Le premier membre est une intégrale dans laquelle t est constant et y fonction de x. Prenons y comme variable indépendante, on aura

$$x = y - ty(1-y).$$

Les limites de y seront encore zéro et 1, et l'on aura

$$\int_0^1 f[y-ty(1-y)]y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\,dy = \sum \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)} A_n t^n.$$

Ainsi il suffira d'effectuer la quadrature du premier membre ou d'obtenir son développement en série pour connaître tous les coefficients A_n. Cette remarque permet de trouver beaucoup de développements en série.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(x)$ se réduise à x^p, p étant quelconque. On aura à effectuer la quadrature

$$\int_0^1 y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}y^p[1-t(1-y)]^p dy,$$

ou plutôt à la développer suivant les puissances de t. Le coefficient de t^n sera

$$(-1)^n\frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{1.2\dots n}\int_0 y^{p+\gamma-1}(1-y)^{\alpha+n-\gamma}dy$$
$$= (-1)^n\frac{p\dots(p-n+1)}{1.2\dots n}\,\frac{\Gamma(p+\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n+p+1)},$$

et l'on aura par conséquent

$$(18)\quad \begin{cases} x^p = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots, \\ A_n = (-1)^n \dfrac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n} \dfrac{\Gamma(n+\alpha)(2n+\alpha)\Gamma(p+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n+p+1)}. \end{cases}$$

La suite (18) se termine toutes les fois que p est entier, comme on devait s'y attendre. En l'appliquant à chacun des termes d'un polynôme, on pourra remplacer ce polynôme par une suite formée d'un nombre limité de fonctions X_n. Elle nous sera très-utile aussi quand on y fera p fractionnaire.

Après cette remarque sur la détermination des coefficients, revenons à la série qui sert de développement à une fonction quelconque $f(x)$,

$$(19)\qquad f(x) = \sum \frac{X_n}{J_n} \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z) Z_n dz,$$

où Z_n désigne le polynôme X_n, dans lequel on a remplacé x par z. Nous devons nous demander si elle est convergente et si elle représente la fonction. A cet effet, nous allons étudier la somme des $n+1$ premiers termes de la série et en chercher la limite quand n croît. Cette somme est

$$(20)\qquad S_n = \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z) dz \left(\frac{X_0 Z_0}{J_0} + \frac{X_1 Z_1}{J_1} + \cdots + \frac{X_n Z_n}{J_n}\right).$$

D'après une formule donnée à l'article précédent, elle peut être remplacée par l'intégrale plus simple

$$(21)\, S_n = \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)J_n} \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z) \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{z-x} dz,$$

dont il y a à déterminer la limite quand n croît indéfiniment. Nous pouvons, en commettant une erreur relative d'autant plus faible que n est plus grand, remplacer le coefficient numérique de l'intégrale par $\frac{1}{4J_n}$. Nous décomposerons en outre l'intervalle de zéro à 1 en trois : l'un de zéro à ε, l'autre de ε à $1-\varepsilon$, le troisième de $1-\varepsilon$ à 1, ε étant aussi

petit qu'on le voudra, mais fixe quand n augmentera indéfiniment. Ainsi, nous avons à chercher la limite de l'intégrale

$$(22) \qquad \frac{1}{4 J_n} \int z^{\gamma-1} (1-z)^{\alpha-\gamma} f(z) \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{z - x} dz,$$

prise successivement dans les trois intervalles $(0, \varepsilon)(\varepsilon, 1-\varepsilon)(1-\varepsilon, 1)$. Nous commencerons par considérer le second et le plus grand de ces trois intervalles, et nous y remplacerons $X_n, Z_n, X_{n+1}, Z_{n+1}$ par leurs expressions approchées.

Posons

$$x = \sin^2 \psi, \quad z = \sin^2 \varphi,$$

φ et ψ étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; $f(z)\,dz$ prendra la forme $f_1(\varphi)\,d\varphi$. On a

$$X_n = \sqrt{\frac{2 J_n}{\pi}} \sin^{\frac{1}{2}-\gamma} \psi \cos^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \psi \cos\left[(2n+\alpha)\psi - \frac{\pi}{4}(2\gamma - 1)\right],$$

$$X_{n+1} = \sqrt{\frac{2 J_n}{\pi}} \sin^{\frac{1}{2}-\gamma} \psi \cos^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \psi \cos\left[(2n+\alpha+2)\psi - \frac{\pi}{4}(2\gamma - 1)\right];$$

et des expressions analogues pour Z_n, Z_{n+1}. En les substituant, nous trouvons

$$\frac{1}{\pi} \int \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} f_1(\varphi)\,d\varphi \frac{\sin\left[(2n+\alpha+1)(\varphi+\psi) - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]}{\sin(\varphi+\psi)},$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} f_1(\varphi)\,d\varphi \frac{\sin[(2n+\alpha+1)(\varphi-\psi)]}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Ces intégrales sont bien connues : on les rencontre dans la théorie des séries trigonométriques. La première tend vers zéro, la seconde vers la limite

$$\tfrac{1}{2} f_1(\psi+0) + \tfrac{1}{2} f_1(\psi-0) = \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

lorsque $f(x)$ est finie, ou devient infinie si $f(x)$ est infinie.

Ainsi l'une des trois parties dont nous devons chercher la limite, *nous donne le même résultat que si la série était trigonométrique* [**].

[**] Au tome I (3e série, p. 194) de ce Journal, M. Laurent a déjà indiqué, pour le cas spécial des séries ordonnées suivant les polygones de Legendre, une méthode semblable à celle qui est développée ici.

Toutefois, cette partie de la démonstration est sujette à une objection grave qu'il importe de lever. Dans le calcul de l'intégrale que nous venons d'étudier, nous avons admis qu'on peut remplacer les polynômes par leurs expressions approchées. Cette substitution est-elle légitime? En l'effectuant, nous avons commis une erreur, et il est indispensable d'examiner si cette erreur n'augmente pas indéfiniment avec n. Désignons, pour abréger, par $X'_n \sqrt{J_n}$, $Z'_n \sqrt{J_n}$ les expressions approchées de $X_n Z_n$. Nous avons établi, en toute rigueur (art. VII), que l'on a

$$Z_n = \sqrt{J_n}\left(Z'_n + \frac{p}{n}\right), \quad X_n = \sqrt{J_n}\left(X'_n + \frac{p_1}{n}\right),$$

p, p_1 demeurant au-dessous d'une certaine limite, quel que soit n, si x et z demeurent compris entre ε et $1-\varepsilon$. Il suit de là que remplacer les polynômes par leurs expressions approchées, c'est négliger, dans l'intégrale (22), un groupe de termes de la forme

$$\frac{1}{n}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\,\frac{Pf(z)\,dz}{z-x},$$

P étant une fonction telle que p, p_1 demeurant au-dessous d'un nombre fixe quand n croît indéfiniment. D'ailleurs $\frac{P}{x-z}$ demeure finie pour $x = z$, puisque cette propriété appartient à la fois au terme

$$\frac{Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n}{z-x},$$

et à ceux que l'on a obtenus en remplaçant les polynômes par leurs expressions approchées.

Mais, si P a la propriété, comme p et p_1, de demeurer au-dessous d'une limite fixe, cette propriété ne peut s'étendre au quotient $\frac{P}{x-z}$, au moins dans le voisinage de la valeur $z = x$, et l'on ne peut pas affirmer que la partie suivante de l'intégrale

$$\frac{1}{n}\int_{x-h}^{x+h} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z)\,\frac{P}{x-z}\,dz,$$

qui est d'ailleurs finie, tende vers zéro, et n'augmente pas indéfiniment quand n croît.

Pour résoudre la difficulté précédente, je ne vois d'autre moyen que l'emploi de la deuxième approximation des polynômes X_n, telle qu'elle a été donnée à la fin de la première Partie.

Nous avons remarqué que les formules qui réalisent cette approximation contiennent : 1° les termes de l'ordre de $\sqrt{J_n}$ qui se trouvent dans la première; 2° des termes de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n}$; 3° enfin l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n^2}$. On a des formules telles que les suivantes :

$$Z_n = \sqrt{J_n}\left(Z'_n + \frac{Z''_n}{n} + \frac{p}{n^2}\right),$$
$$X_n = \sqrt{J_n}\left(X'_n + \frac{X''_n}{n} + \frac{p_1}{n^2}\right);$$

p p_1 demeurant toujours au-dessous d'un nombre fixe, et les dérivées p', p'_1 étant des formes nq, nq_1, où q, q_1 demeurent, comme p, p_1, inférieurs à un nombre fixe pour les valeurs de x et de z comprises entre ε et $1-\varepsilon$. Il suit de là que, si nous substituons dans l'intégrale (22) les expressions de X_n, Z_n, X_{n+1}, Z_{n+1}, déduites des formules précédentes, nous obtiendrons le résultat suivant :

1° Les termes résultant de la première approximation ont été calculés et nous donneront comme limite

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)];$$

2° Les seconds termes des expressions approchées, combinés entre eux ou avec les précédents, donneront des intégrales toutes pareilles à celles qui proviennent des termes du premier ordre, *mais divisées par n* ou par n^2 elles auront toutes zéro pour limite;

3° Il restera enfin le groupe des termes contenant tous au moins une des fonctions inconnues, telles que p et p_1, et qu'on pourra écrire

$$\frac{1}{n^2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(z)\, z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\,\frac{P(z)}{x-z}\,dz,$$

$P(z)$ étant une fonction des quantités, telles que p, p_1, $\sin 2n\varphi$, $\cos 2n\varphi$, et demeurant par conséquent au-dessous d'un nombre fixe dans toute l'étendue de l'intégration. On a, en outre, $P(x) = 0$, pour la raison qui a déjà été donnée à propos de la première approximation.

D'après ce que nous savons sur les dérivées des fonctions p, p_1 et sur celle des sinus, on peut affirmer que l'on a

$$P'(z) = nQ(z),$$

$Q(z)$ demeurant au-dessous d'un nombre fixe, quel que soit n. D'après cela, si l'on remarque que l'on a

$$\frac{P(z) - P(x)}{z - x} = \frac{P(z)}{z - x} = P'[x + \theta(z - x)] = nQ[x + \theta(x - z)],$$

on voit que l'intégrale à examiner prendra la forme

$$\frac{1}{n}\int f(z) z^{\gamma-1}(1 - z)^{\alpha-\gamma} Q[x + \theta(z - x)]\, dz,$$

et Q demeurant au-dessous d'une limite fixe, on voit que cette intégrale tendra vers zéro quand n croîtra indéfiniment, ce qui complète notre démonstration.

En résumé, la considération de la première partie de l'intégrale nous donne des *conclusions aussi étendues, s'appliquant à des fonctions aussi générales que celles considérées par Dirichlet dans son travail classique sur les séries trigonométriques.*

Examinons maintenant l'intégrale (22) prise entre les limites 0, ε; $1 - \varepsilon$, 1. A cause de la symétrie par rapport aux limites, signalée à l'article précédent, il suffira de trouver la limite de l'intégrale prise dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

Dans cet intervalle, nous le savons, l'expression approchée de nos polynômes ne peut plus être employée, et un examen sérieux de cette partie de l'intégrale est d'autant plus nécessaire que quelques-uns de ces polynômes croissent indéfiniment avec n. Reprenons donc l'expression

$$\frac{1}{4J_n}\int_0^{\varepsilon} z^{\gamma-1}(1 - z)^{\alpha-\gamma} \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{z - x} f(z)\, dz,$$

et cherchons si cette intégrale peut être rendue infiniment petite avec ε, *quel que soit n*. On peut l'écrire

$$\frac{X_{n+1}}{4J_n}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{f(z)}{z-x}Z_n\,dz - \frac{X_n}{4J_n}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{f(z)}{z-x}Z_{n+1}\,dz.$$

Les deux intégrales précédentes ont la même forme. Elles sont multipliées toutes deux par des coefficients de l'ordre de $n^{\gamma-\frac{1}{2}}$. Si donc on pose, pour abréger,

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-x},$$

il suffira de prouver que l'intégrale

$$(23)\qquad n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz,$$

où $\varphi(z)$ est une fonction finie, peut être rendue infiniment petite avec ε, même quand n croît au delà de toute limite.

A cet effet, imitant un procédé déjà employé à l'article VII, comparons-la à la suivante :

$$(24)\qquad \int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2\,dz = \theta J_n = \theta\frac{\Gamma^2(\gamma)}{2}n^{1-2\gamma},$$

considérée au même article où nous avons prouvé que θ est infiniment petit avec ε quand n grandit sans limite.

Décomposons l'intervalle (o, ε) en deux autres séries d'intervalles : les uns, pour lesquels Z_n sera inférieur à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, H étant quelconque; les autres, pour lesquels il sera supérieur à la même quantité. Pour les premiers intervalles, l'intégrale (46) sera plus petite que le résultat obtenu en remplaçant Z_n par sa limite supérieure, ce qui donnera

$$H\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)\,dz = \theta' H,$$

θ' étant infiniment petite avec ε, puisque l'intégrale précédente indépendante de n s'étend dans un intervalle au plus égal à ε.

Prenons maintenant l'intégrale (20) dans les autres intervalles, ceux pour lesquels Z_n est supérieur à $\mathrm{H}n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, et comparons-la à l'intégrale (24) prise dans les mêmes intervalles, on aura

$$\frac{\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz}{\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2\,dz} = \theta_1\frac{z'^{\gamma-1}(1-z')^{\alpha-\gamma}\varphi(z')Z'_n}{z'^{\gamma-1}(1-z')^{\alpha-\gamma}Z'^2_n} = \frac{\theta_1\varphi(z')}{Z'_n},$$

z' désignant une valeur de z prise dans l'un des intervalles de l'intégration, θ_1 une quantité au plus égale à l'unité. Si nous remplaçons Z'_n par sa limite inférieure $\mathrm{H}n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, nous déduirons de l'équation précédente

$$\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz < \frac{\varphi(z')}{\mathrm{H}}n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2\,dz,$$

l'inégalité ayant lieu en valeur absolue. Or l'intégrale du second membre est plus petite que l'intégrale (24). On a donc ainsi une limite supérieure des deux parties dans lesquelles on a décomposé l'intégrale (20). En réunissant les deux résultats obtenus, on a l'inégalité

$$n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int_0^{\varepsilon} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz < \mathrm{H}\theta' + \theta\frac{\Gamma^2(\gamma)\varphi(z')}{\mathrm{H}},$$

θ, θ' étant infiniment petits avec ε, quel que soit n. Si donc la fonction $\varphi(z')$ ou $\dfrac{f(z')}{z'-x}$ demeure finie dans le voisinage de la valeur $z'=0$, on voit que l'intégrale (20) est infiniment petite avec ε, quel que soit n, et, par conséquent, qu'on peut la négliger dans la recherche de la limite de la somme S_n des n premiers termes de la série. En nous rappelant que les mêmes conclusions s'appliquent à l'intégrale prise dans le voisinage de la valeur 1 de z, nous obtenons la proposition suivante :

Toutes les fois qu'une fonction est telle que les coefficients de la série sont des intégrales ayant un sens déterminé, si la fonction ne devient infinie ni pour $x=0$ ni pour $x=1$, la série représente la fonction avec les mêmes particularités que les séries trigonométriques.

Notre raisonnement ne s'applique pas, on le voit, au cas où la fonc-

tion deviendrait infinie pour une des limites. C'est qu'en effet, en examinant cette hypothèse, nous allons être conduits à cette conclusion inattendue que, dans ce cas, la série peut bien être divergente.

Pour le prouver, nous traiterons le cas où la fonction se ramène à une somme de termes de la forme ax^p, en nombre limité, p étant négatif, auxquels s'ajoute une fonction finie pour $x = 0$. Cette fonction finie, nous n'avons pas à nous en occuper : on lui appliquera les méthodes précédentes. Il suffira donc d'examiner chacun des termes tels que ax^p ou x^p, le coefficient ne jouant aucun rôle.

Or nous avons déjà trouvé les coefficients du développement de x^p, quand il est possible. Si l'on pose

$$x^p = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots.$$

A_n est donné par la formule (18), et il est de l'ordre de n^{-2p-1}. Comme X_n est de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, on voit que les termes de la série précédente seront de l'ordre de $n^{-2p-\frac{1}{2}-\gamma}$. Il faut donc, pour qu'ils tendent vers zéro, que l'on ait

$$p > -\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}. \tag{25}$$

Pour que les intégrales, au moyen desquelles se calculent les coefficients A_n, aient un sens, il faut déjà que l'on ait $p + \gamma > 0$. Mais cette dernière condition n'entraîne la précédente que si l'on a $\gamma < \frac{1}{2}$.

On peut, du reste, prouver que, si l'inégalité (25) est vérifiée, la série que développe x^p est effectivement convergente et qu'elle a pour somme x^p.

Appliquons, en effet, à cette fonction particulière la méthode générale. Nous aurons à trouver la limite de

$$-\frac{1}{4J_n}\int_0^1 \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{x - z} z^p z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\,dz. \tag{26}$$

Posons

$$\frac{z^p}{x-z} = \frac{z^p}{x} + \frac{z^{p+1}}{(x-z)x};$$

nous aurons d'abord à trouver la limite de

$$-\frac{1}{4 J_n x}\int (Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}) z^p z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} dz$$

ou

$$-\frac{X_{n+1}}{4 J_n x}\int_0^1 Z_n z^{p+\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} dz + \frac{X_n}{4 x J_n}\int_0^1 Z_{n+1} z^{p+\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} dz.$$

Les deux intégrales précédentes sont du même ordre que deux termes de la série trouvée pour x^p : elles tendent donc vers zéro. Il nous reste à considérer

$$-\frac{1}{4 J_n x}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{z^{p+1}}{x-z}(Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}) dz;$$

mais cette intégrale ne diffère que par la forme de l'intégrale (26); p y est changé en $p+1$, et elle est divisée par x. En répétant la même opération q fois jusqu'à ce que $p+q$ soit devenu positif, on aura

$$-\frac{1}{4 J_n x^q}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{z^{p+q}}{x-z}(Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}) dz;$$

l'intégrale correspondra à une fonction z^{p+q}, qui ne deviendra plus infinie et aura par conséquent pour limite

$$\frac{x^{p+q}}{x^q} = x^p.$$

Ainsi, tant que p satisfait à l'inégalité (25), la série qui sert de développement à x^p est convergente et a pour somme x^p.

On verra de même que $(1-x)^q$ est développable en série convergente tant que q satisfait à l'inégalité

$$(27) \qquad q > -\frac{\alpha-\gamma+1}{2} - \frac{1}{4}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Pour qu'une fonction soit développable en une série convergente de

fonctions X_n, *il faut et il suffit : 1° que les intégrales qui déterminent les coefficients de la série aient un sens; 2° que si la fonction devient infinie pour* $x = 0$, *elle le soit d'un ordre inférieur à* $\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4}$; *3° que si elle devient infinie pour* $x = 1$, *elle le soit d'un ordre inférieur à* $\frac{\alpha - \gamma + 1}{2} + \frac{1}{4}$.

Par exemple, dans le cas des polynômes de Legendre, toute fonction qui deviendrait infinie d'un ordre égal ou supérieur à $\frac{3}{4}$ pour $x = \pm 1$ ne serait pas développable en une série formée de ces polynômes.

Pour terminer ce sujet, il nous reste à dire quelques mots d'un cas qui n'a pas été traité, et à voir ce que devient la série pour les valeurs extrêmes $x = 0$, $x = 1$, par exemple, pour $x = 0$; on aura, dans ce cas, à chercher la limite de l'intégrale

$$(28) \qquad -\frac{1}{4 J_n} \int_0 \frac{Z_{n+1} - Z_n}{z} f(z)\, z^{\gamma-1} (1 - z)^{\alpha-\gamma}\, dz,$$

à laquelle, en vertu des formules (13) et (14), on peut donner la forme

$$-\frac{1}{4 n J_n} \int_0^1 \left(\frac{n+1}{n+\alpha} \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} \right) f(x)\, x^{\gamma-1} (1 - x)^{\alpha-\gamma}\, dx.$$

On examinera la limite de l'une ou de l'autre de ces intégrales, limite qui n'est pas toujours égale à la fonction $f(0)$. J'ai déjà fait la discussion de cette question, pour le cas particulier des fonctions de Legendre, dans mon Mémoire *Sur les fonctions de deux angles*, etc. (*Journal de M. Liouville*, t. XIX, 2e série, p. 1).

Comme il s'agit ici d'une valeur particulière, je me bornerai à examiner le cas où $f(x) - f(0)$ est de l'ordre de x et je poserai

$$f(x) = f(0) + x\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant finie pour $x = 0$. Alors l'intégrale (28) se ramènera à une somme de deux autres, l'une dans laquelle on remplacerait $f(x)$ par $f(0)$ et qui donnera comme limite $f(0)$, puisque, dans le développement d'une constante, la série se réduit à son premier terme $f(0) X_0$,

l'autre dans laquelle la fonction $f(z)$ sera remplacée par $z\varphi(z)$ et qui sera

$$(29)\qquad -\frac{1}{4J_n}\int_0^1 (Z_{n+1}-Z_n)\,\varphi(z)\,z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\,dz,$$

et l'on appliquera à cette intégrale les méthodes que nous avons employées. On verra, comme précédemment, que l'on peut négliger la partie de l'intégrale dans laquelle z est voisine soit de 0, soit de 1 au moins pour γ supérieur à $\frac{1}{2}$, et l'on pourra ensuite, en prenant l'intégrale entre les limites ε, $1-\varepsilon$, remplacer les polynômes par leurs expressions approchées, ce qui donnera une intégrale de la forme

$$\frac{2n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma)}\int \sin^{\gamma-\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} f_1(\varphi)\,d\varphi\sin\left[(2n+\alpha+1)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right];$$

or l'évaluation de l'ordre de cette intégrale est le point de départ de notre travail. On saura donc traiter cette question, sur laquelle nous n'insisterons pas pour les raisons déjà indiquées.

Nous terminerons cet article par une remarque essentielle. Il n'est pas nécessaire que la fonction $f(x)$ qu'on développe soit réelle; si elle est imaginaire, il suffira de considérer successivement la partie réelle et la partie imaginaire. Les raisonnements ne subiront aucune modification.

X.

Après avoir examiné les séries ordonnées suivant les polynômes X_n, quand la variable x demeure réelle et comprise entre -1 et $+1$, on peut se demander si elles sont convergentes dans une étendue plus grande et il est maintenant très-facile de résoudre cette question.

Cherchons d'abord les limites de la convergence d'une série de polynômes X_n

$$A_0X_0+A_1X_1+\ldots+A_nX_n+\ldots;$$

il résulte de l'expression approchée de nos polynômes

$$X_n = \varphi(\xi) n^{\frac{1}{2}-\gamma} \xi^n (1 + \varepsilon_n),$$

donnée à l'article II, qu'on peut assimiler les séries de ce genre à celles qui sont ordonnées suivant les puissances entières de la variable ξ. Les courbes limitant la région de convergence seront celles pour lesquelles ξ aura un module constant, c'est-à-dire que ce seront des ellipses ayant pour foyers les deux points o et 1. Ainsi toutes les séries de fonctions X_n, quels que soient les nombres α et γ, si elles sont convergentes, le sont à l'intérieur d'une certaine ellipse qui peut, d'ailleurs, se réduire à la portion de ligne droite comprise entre les foyers.

Admettons que la convergence ait lieu à l'intérieur d'une de ces ellipses, je dis que, dans la région de convergence, la série représentera une fonction finie, continue, qu'elle pourra être différentiée, intégrée, etc.

Soit, en effet, a le module de ξ sur l'ellipse de convergence, à l'intérieur de toute ellipse correspondant au module $a - \rho$ plus petit que a; la série de fonctions X_n sera uniformément convergente, et, comme ses termes sont des fonctions continues, elle sera elle-même continue; elle pourra être différentiée, intégrée. On voit, d'après cela, que si l'on développe sur le segment (o, 1), d'après les méthodes précédentes, une fonction discontinue, ou devenant infinie, ou telle qu'une de ses dérivées soit discontinue ou infinie sur le même segment, la convergence de la série ne pourra s'étendre au delà de ce segment.

Ces remarques nous permettent d'étendre, au moins pour une classe importante de fonctions, les résultats que nous avons trouvés. Supposons qu'il s'agisse de développer une fonction $f(x)$ suivant une série formée de ces polynômes que nous avons écartés, et pour lesquels l'une au moins des quantités γ, $\alpha - \gamma + 1$ est négative. Si la fonction est continue et uniforme à l'intérieur d'une certaine ellipse, le développement est possible; nous le démontrerons plus loin. Soit

$$f(x) = \Sigma A_n X_n$$

ce développement.

Pour en déterminer les coefficients, on remarquera que, si l'on

prend la dérivée d'ordre p, on a

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \Sigma A_n \frac{d^p X_n}{dx^p}.$$

Or les coefficients $\frac{d^p X_n}{dx^p}$ sont aussi des séries hypergéométriques qui ne diffèrent des polynômes X_n qu'en ce que γ et $\alpha - \gamma$ sont augmentés de p. En prenant les dérivées jusqu'à un ordre convenable, on aura donc des polynômes, pour lesquels γ et $\alpha - \gamma + 1$ seront positifs, et auxquels on pourra, par conséquent, appliquer les méthodes précédentes de détermination des coefficients.

XI.

Nous allons maintenant démontrer que, si une fonction est continue et uniforme à l'intérieur d'une ellipse donnée, elle est développable en une série de fonctions X_n convergentes à l'intérieur de cette ellipse. A cet effet, nous emploierons la méthode suivie par MM. Neumann et Heine dans le cas particulier des polynômes de Legendre, et nous développerons d'abord $\frac{1}{x-y}$ en une série de fonctions X_n.

Posons

$$(30) \qquad \frac{1}{x-y} = \Sigma \frac{X_n Q_n}{J_n}.$$

Les coefficients Q_n sont des fonctions de y, qu'il s'agit d'étudier et de déterminer. Si nous supposons encore γ, $\alpha - \gamma + 1$ positifs, nous aurons

$$(31) \qquad Q_n = \int_0^1 \frac{X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx}{x-y}.$$

Ces fonctions Q_n seront appelées *fonctions de seconde espèce*. Elles satisfont à une équation différentielle qu'on peut former de la manière suivante :

u désignant $\frac{1}{x-y}$, on peut établir une identité de la forme sui-

vante :

$$x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{\partial u}{\partial x} + n(n+\alpha)u$$
$$= y(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_1(y)\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{H}u.$$

Il suffit de prendre

$$f_1(y) = 2 - \gamma + (\alpha - 3)y, \quad \mathrm{H} = (n+1)(n+\alpha-1).$$

En substituant à la place de u son développement en série, et en tenant compte de l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction X_p, le premier membre prend la forme

$$\Sigma[n(n+\alpha) - p(p+\alpha)]\frac{X_p Q_p}{J_p},$$

et ne contient plus le terme en X_n. Il doit donc en être de même du second. En égalant le coefficient de X_n à zéro, on trouve

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &y(1-y)\frac{d^2 Q_n}{dy^2} + [2-\gamma+(\alpha-3)y]\frac{dQ_n}{dy} \\ &\qquad + (n+1)(n+\alpha-1)Q_n = 0, \end{aligned}\right.$$

équation différentielle à laquelle satisfait Q_n, et que l'on peut vérifier en prenant pour Q_n l'intégrale (31).

Cette équation différentielle, obtenue par différents auteurs dans le cas des polynômes de Legendre, se confond alors ($\gamma = \alpha = 1$) avec celle qui caractérise les polynômes X_n. Dans les autres cas, elle en est, comme on voit, différente par les coefficients. Mais, si l'on pose

$$(33)\qquad Q_n = y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}U_n,$$

un calcul qui ne présente aucune difficulté montre que U_n satisfait à la même équation que les polynômes X_n. C'est là un résultat remarquable qui ramène la théorie des fonctions de première et de seconde espèce à la considération d'une seule équation différentielle; mais il est utile de remarquer que les fonctions Q_n, d'après leur expression

(31), sont continues et finies dans toute l'étendue du plan, sauf sur le segment (o, 1), propriété qui, d'après la formule (33), n'appartiendra que très-exceptionnellement à U_n.

Si les fonctions Q_n ne satisfont pas à la même équation différentielle que les polynômes X_n, elles s'en rapprochent à un autre point de vue : elles satisfont à la même équation aux différences, c'est-à-dire il y a entre trois fonctions Q_n consécutives la même relation qu'entre les trois fonctions X_n de même rang. C'est ce que l'on établira de la manière suivante. L'équation (30) peut s'écrire

$$X_0 = 1 = \sum \frac{Q_n}{J_n}(xX_n - yX_n).$$

Exprimons, au moyen de l'équation (6), xX_n en fonction linéaire de X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, et substituons cette expression dans la formule précédente, nous aurons

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} X_0 = \sum \frac{X_n}{J_n\,(2n+\alpha)} \Bigg[& \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(Q_n - Q_{n+1}) \\ & + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(Q_n - Q_{n-1}) - y(2n+\alpha)Q_n \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Tant que n est différent de zéro, le coefficient de X_n doit être nul. On a donc

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(Q_n - Q_{n+1}) \\ & \quad + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(Q_n - Q_{n-1}) - y(2n+\alpha)Q_n = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est la même équation, sauf le changement de x en y, que pour les polynômes X_n; mais il convient de remarquer qu'elle ne s'applique pas pour $n = 0$. En effet, le coefficient de X_0 dans le second membre de la formule (34) doit être égal, non plus à o, mais à 1. On a donc

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} Q_1 &= Q_0\left[1 - \frac{(\alpha+1)y}{\gamma}\right] - \frac{\alpha+1}{\gamma} J_0 \\ &= Q_0\left[1 - \frac{(\alpha+1)y}{\gamma}\right] - \frac{\alpha+1}{\gamma}\,\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation montre qu'il suffira de connaître l'une des fonctions pour en déduire toutes les autres.

On voit que Q_n s'exprimera en fonction linéaire de Q_0, le coefficient de Q_0 et le terme indépendant étant deux polynômes. De plus, le coefficient de Q_0 dans l'équation précédente étant le polynôme X_1, où l'on a remplacé x par y, le coefficient de Q_0 dans Q_n sera de même le polynôme $X_n(y)$. C'est, du reste, une forme de Q_n, qu'on peut mettre directement en évidence. La formule (32) peut s'écrire

$$Q_n = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x-y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx + Y_n \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx}{x-y},$$

Y_n désignant le polynôme X_n, où l'on a remplacé x par y. On a donc

$$Q_n(y) = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x-y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx + Y_n Q_0.$$

En remarquant que $X_n - Y_n$ est divisible par $x - y$, et posant

$$(37) \qquad R_n(y) = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x-y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx,$$

on voit que R_n est un polynôme en y d'ordre $n-1$, et l'on a

$$(38) \qquad Q_n(y) = Y_n Q_0(y) + R_n(y),$$

ce qui met en évidence l'expression de $Q_n(y)$ en fonction de $Q_0(y)$.

D'après cela, si l'on veut résoudre complètement l'équation aux différences à laquelle satisfont les polynômes X_n,

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(u_n - u_{n+1}) \\ &\quad + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(u_n - u_{n-1}) - (2n+\alpha)x u_n = 0, \end{aligned} \right.$$

on a déjà deux solutions :

$$1^\circ\ X_n(x), \qquad 2^\circ\ R_n(x),$$

et par conséquent la solution la plus générale sera

$$\varphi(x) X_n(x) + \psi(x) R_n(x).$$

En particulier, on aura $Q_n(x)$ en prenant

$$\varphi(x) = Q_0(x), \quad \psi(x) = 1;$$

$U_n(x)$ en prenant

$$\varphi(x) = Q_0(x) x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}, \quad \psi(x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}.$$

XII.

Revenons à la formule qui donne $Q_n(y)$; remplaçons-y X_n par son expression comme dérivée $n^{ième}$, et intégrons n fois par partie : nous aurons

$$(40) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \int_0^1 \frac{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}}{(x-y)^{n+1}} dx.$$

Cette formule, donnée par Jacobi, est très-importante pour la théorie des fractions continues. Développons, en effet, l'intégrale suivant les puissances de $\frac{1}{y}$. Le développement commence au terme en $\frac{1}{y^{n+1}}$, et l'on a

$$(41) \quad Q_n = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(2n+\alpha+1)} \frac{1}{y^{n+1}} F\left(\gamma+n, n+1, 2n+\alpha+1, \frac{1}{y}\right).$$

Si nous rapprochons ce résultat de la formule

$$(42) \qquad Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{Q_n}{Y_n},$$

on voit que le développement de $\frac{Q_n}{Y_n}$, suivant les puissances descen-

dantes de y, commencera au terme en $\frac{1}{y^{2n+1}}$. On aura donc

$$(43) \qquad Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{\varepsilon}{y^{2n+1}} + \cdots$$

Donc $-\frac{R_n}{Y_n}$ sera la réduite d'ordre n du développement de Q_0 en fraction continue. Or, d'après la formule (41), Q_0 n'est autre chose, à un facteur constant près, que l'importante série

$$F\left(\gamma, 1, \alpha + 1, \frac{1}{y}\right),$$

qui comprend comme cas particulier le binôme, le logarithme, etc.

La forme si simple de la nouvelle expression des fonctions de seconde espèce nous indique un nombre illimité de fonctions génératrices pour les fonctions Q_n. Ainsi l'on aura

$$(44) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{x-y}\,\varpi\left[\frac{ux(1-x)}{x-y}\right]dx = \Sigma_n\,\varpi_n(0)\,\frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{(1.2\ldots n)^2}\,Q_n(y)\,u^n.$$

En particulier,

$$(45) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx}{x-y-ux(1-x)} = \sum_n \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(n+1)}\,u^n\,Q_n(y).$$

Pour les fonctions de Legendre, on trouverait

$$\frac{1}{\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}}\log\frac{u-1+2y+\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}}{u-1+2y-\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}} = \Sigma u^n Q_n(y).$$

Enfin l'expression (40) de Q_n est très-propre à nous faire connaître une expression approchée de Q_n pour n très-grand. L'intégrale qui figure dans cette formule a déjà été considérée (art. IV) et, pour avoir l'expression de Q_n, il suffira d'appliquer l'équation (29) de cet article et de remplacer les factorielles par leurs expressions approchées. Posons

$$y = -\frac{(\eta+1)^2}{4\eta}, \quad \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

le signe du radical étant choisi de manière que le module de η soit supérieur à l'unité; nous aurons

$$(46)\qquad \frac{Q}{J_n} = \sqrt{\pi}\,\frac{2^{3-\alpha} n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\gamma)}(1-\eta^{-1})^{\gamma-\frac{3}{2}}(1+\eta^{-1})^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\eta^{-n-1}(1+\varepsilon_n),$$

ou plus simplement

$$(47)\qquad \frac{Q_n}{J_n} = n^{\gamma-\frac{1}{2}} f(\eta)\eta^{-n-1}, \quad \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

$f(\eta)$ étant une fonction, toujours la même, de η. Cette formule est toute pareille à celle de X_n, qu'on peut écrire, comme nous l'avons vu,

$$(48)\qquad X_n = n^{\frac{1}{2}-\gamma}\varphi(\xi)\xi^n, \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

$\varphi(\xi)$ étant une fonction connue par ce qui précède (art. II). ξ et η ont respectivement pour modules la somme des deux demi-axes des ellipses de foyers 0, 1 passant par les points qui représentent les variables x, y.

Nous terminerons par une remarque sur l'étendue des résultats obtenus. Notre point de départ supposait γ, $\alpha - \gamma + 1$ positifs ; mais nous pouvons maintenant nous affranchir de cette supposition. En effet, la formule (40) est valable, quels que soient α et γ, pour des valeurs suffisamment grandes de n, et l'équation aux différences déterminera les fonctions pour lesquelles l'intégrale qui y figure n'aura aucun sens. Dans tous les cas, les fonctions Q_n ainsi déterminées satisfont à l'équation différentielle du second ordre que nous avons donnée pour elles. Nous trouvons ainsi, dans les résultats obtenus pour une hypothèse particulière, un point de départ pour les appliquer à tous les polynômes qui naissent de la série hypergéométrique.

XIII.

Nous pouvons maintenant démontrer la convergence et déterminer la somme de la série qui sert de développement à $\frac{1}{x-y}$, en employant la formule principale de notre Mémoire *Sur le théorème de Sturm*.

Supposons que l'on désigne par $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ deux solutions distinctes ou confondues de la même équation aux différences

$$u_n \mathrm{X}_{n+1} + (v_n + w_n x)\mathrm{X}_n + t_n \mathrm{X}_{n-1} = 0,$$

où u_n, v_n, w_n, t_n sont des fonctions de n. On peut toujours, en multipliant par une fonction de n, donner à cette équation la forme

$$u_n \mathrm{X}_{n+1} + u_{n-1}\mathrm{X}_{n-1} + (v_n + w_n x)\mathrm{X}_n = 0.$$

On aura, en exprimant que les deux solutions satisfont à cette équation,

$$\begin{aligned} u_n \varphi_{n+1}(x) + u_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + (v_n + w_n x)\varphi_n(x) &= 0,\\ u_n \psi_{n+1}(y) + u_{n-1}\psi_{n-1}(y) + (v_n + w_n y)\psi_n(y) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces équations par $\psi_n(y)$, la seconde par $-\varphi_n(x)$ et ajoutons-les; nous obtiendrons la formule

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} & u_n \frac{\varphi_{n+1}(x)\psi_n(y) - \psi_{n+1}(y)\varphi_n(x)}{x-y} \\ & \quad - u_{n-1}\frac{\varphi_n(x)\psi_{n-1}(y) - \varphi_{n-1}(x)\psi_n(y)}{x-y} = -w_n\varphi_n(x)\psi_n(y). \end{aligned}\right.$$

Le terme $-w_n\varphi_n(x)\psi_{n-1}(y)$ se présente comme la différence de deux expressions qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de n en $n-1$, et par suite la somme

$$\sum_{n=h}^{n=k} w_n \varphi_n(x)\psi_n(y)$$

se ramènera toujours à la différence de deux termes semblables.

Appliquons cette remarque générale à notre équation aux différences et aux deux fonctions $\mathrm{X}_n(x)\mathrm{Q}_n(y)$. On trouvera

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{X}_n \mathrm{Q}_n}{\mathrm{J}_n} = {} & \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)} \frac{\mathrm{X}_n\mathrm{Q}_{n-1} - \mathrm{X}_{n-1}\mathrm{Q}_n}{\mathrm{J}_n(x-y)} \\ & - \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+2)(2n+\alpha+1)} \frac{\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{Q}_n - \mathrm{X}_n\mathrm{Q}_{n+1}}{\mathrm{J}_{n+1}(x-y)}. \end{aligned}$$

L'équation aux différences admet comme solution Q_n à partir de $n = 1$. Faisons la somme des équations qu'on obtient en donnant dans la formule précédente à n les valeurs $1.2\ldots n$; nous aurons

$$\frac{X_1 Q_1}{J_1} + \cdots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{1+\alpha-\gamma}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{X_1 Q_0 - X_0 Q_1}{(x-y) J_1}$$
$$- \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_{n+1}(x-y)}.$$

Ajoutons aux deux membres $\frac{X_0 Q_0}{J_0}$ et remplaçons Q_1 par sa valeur tirée de la formule (36), nous aurons

$$(50) \quad \begin{cases} \dfrac{X_0 Q_0}{J_0} + \cdots + \dfrac{X_n Q_n}{J_n} \\ \quad = \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \dfrac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{(x-y) J_{n+1}}. \end{cases}$$

Cette formule peut être considérée comme la généralisation de la propriété bien connue que possède le développement de $\frac{1}{x-y}$ suivant les puissances de x. Dans l'un et l'autre cas on peut ramener à la réunion de deux termes la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de la série. La marche que nous avons suivie montre que cette propriété subsistera pour tous les polynômes formant une suite de Sturm. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier article.

Pour prouver que la série est convergente et a pour somme $\frac{1}{x-y}$, il suffira d'établir que le terme

$$\frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha-2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{(x-y) J_{n+1}}$$

tend vers zéro lorsque n grandit indéfiniment. Or, si nous remplaçons les polynômes par leurs expressions approchées (46), (47), nous obtenons pour le reste la formule

$$\frac{f(\eta)\varphi(\xi)}{4(x-y)} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)(1 + \varepsilon_n).$$

Il tendra donc vers zéro toutes les fois que le module de ξ sera inférieur à celui de η, et il croîtra indéfiniment dans le cas contraire. Ainsi nous obtenons la proposition suivante :

La série

$$\frac{X_0 Q_0}{J_0} + \frac{X_1 Q_1}{J_1} + \cdots$$

sera convergente et aura pour somme $\frac{1}{x-y}$ *seulement si le point* x *est à l'intérieur de l'ellipse passant par le point* y *et ayant pour foyers les deux points* 0, 1.

Si les deux points x, y étaient sur la même ellipse, la somme de la série serait indéterminée.

En étudiant de même la série

$$\sum \frac{Q_n(x) Q_n(y)}{J_n},$$

on verra qu'elle est toujours convergente et a pour somme

$$\frac{Q_0(x) - Q_0(y)}{x-y}.$$

XIV.

Considérons maintenant une fonction quelconque continue et uniforme dans l'anneau compris entre deux des ellipses homofocales si souvent considérées, et soit A le point représentant la variable t.

D'après la formule de Cauchy, on aura

$$2\pi i f(t) = \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-t} - \int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z-t},$$

les deux intégrales étant prises sur les contours C, C' des deux ellipses supposées, parcourus dans le sens direct. Cette formule nous permet de développer $f(t)$. En effet, appelons T_n ce que devient le polynôme X_n quand on y remplace x par t. Nous aurons sur le contour C

la série convergente

$$\frac{1}{z-t} = -\sum \frac{T_n Q_n(z)}{J_n},$$

et par conséquent

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-t} = -\sum \frac{T_n}{J_n}\int_C f(z) Q_n(z)\,dz.$$

Sur le contour C′ on aura, au contraire,

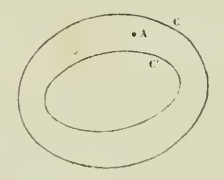
$$\frac{1}{z-t} = \sum \frac{Z_n Q_n(t)}{J_n},$$

la série étant également convergente ; et, par suite,

$$\int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z-t} = \sum \frac{Q_n(t)}{J_n}\int_{C'} f(z) Z_n\,dz.$$

En réunissant ces deux résultats, nous obtenons la formule

$$(51)\quad f(t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum \frac{T_n}{J_n}\int_C f(z) Q_n(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\sum \frac{Q_n(t)}{J_n}\int_{C'} f(z) Z_n\,dz,$$



c'est-à-dire le développement de $f(t)$ en une série de fonctions de première et de seconde espèce. L'emploi de l'équation (50) nous donnerait au besoin une limite de l'erreur commise quand on s'arrête à un terme de rang quelconque.

Si la fonction est continue à l'intérieur de l'ellipse (C) tout entière, les intégrales multiplicateurs des fonctions Q_n sont évidemment nulles, et il ne reste que les fonctions de première espèce. Au contraire, si la fonction est continue à l'extérieur de l'ellipse (C′) jusqu'à l'infini, sans point singulier à l'infini, la série ne contient plus que des fonc-

tions de seconde espèce. Nous obtenons, comme cas particulier, la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit développable en une série de fonctions X_n, c'est qu'elle soit continue, uniforme et finie à l'intérieur d'une ellipse.

XV.

Nous terminerons notre travail en donnant diverses expressions de la fonction Q_n.

L'équation à laquelle satisfait X_n peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left[x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}\frac{dy}{dx}\right] = -n(n+\alpha)yx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}.$$

Nous en connaissons deux solutions, X_n et la fonction que nous avons appelée U_n. On aura donc entre ces deux intégrales la relation

$$x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}\left(U_n\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dU_n}{dx}\right) = C.$$

En intégrant et se rappelant que U_n et Q_n sont nuls pour $x=\infty$, on a

$$U_n = CX_n\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2},$$

et par conséquent

$$Q_n = CX_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2}.$$

Pour obtenir le coefficient C, il suffit de développer suivant les puissances décroissantes de x et de comparer le premier terme de ce développement à celui de la formule (41). On trouve ainsi

$$C = (2n+\alpha)J_n,$$

$$(52)\quad Q_n(x) = (2n+\alpha)J_nX_nx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2}$$

Il m'a paru intéressant de vérifier que cette intégrale se ramène à une fonction linéaire de Q_0.

A cet effet, décomposons en fractions simples $\frac{1}{x(1-x)X_n^2}$. Si nous appelons u une racine quelconque du polynôme X_n, nous aurons

$$(53)\qquad \frac{1}{x(1-x)X_n^2} = \frac{1}{x} + \frac{h}{1-x} + \sum \frac{B_u}{x-u} + \sum \frac{A_u}{(x-u)^2}.$$

En calculant A_u, B_u, et tenant compte de l'équation différentielle pour éliminer de l'expression de B_u la dérivée seconde de X_n, on trouve

$$A_u = \frac{1}{u(1-u)U'^2}, \quad B_u = A_u\left(\frac{\alpha-\gamma}{u-1} + \frac{\gamma-1}{u}\right).$$

On aura ainsi

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2} = \frac{d}{dx}\sum \frac{A_u}{(u-x)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}} & \\ + \frac{1}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}\left[1 + \sum \frac{(\gamma-1)A_u}{u}\right] & \\ + \frac{1}{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}\left[h - 1 + \sum \frac{(\alpha-\gamma)A_u}{1-u}\right. & \\ \left. + \sum \frac{(1-\gamma)A_u}{u}\right]. & \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme disparaît, car son coefficient est celui de $\frac{1}{x}$ dans le développement du second membre de l'équation (53), suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, coefficient qui doit être nul, car le terme en $\frac{1}{x}$ n'existe pas dans le développement du premier membre de la même équation. En substituant l'expression de $\frac{1}{X_n^2}$ tirée de la formule (54) dans l'intégrale (52), et posant, pour abréger,

$$H_n = 1 + \sum \frac{(\gamma-1)A_u}{u},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} Q_n(x) = {} & (2n+\alpha)J_n \sum \frac{A_u X_n}{x-u} \\ & + (2n+\alpha)J_n H_n X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, en vertu de la même équation (52),

$$Q_0 = \alpha J_0 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{dx}{x^{\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}.$$

En comparant cette équation à la précédente, on trouve qu'en posant

$$R_n(x) = (2n+\alpha)\, J_n \sum \frac{A_u X_u}{x-u}$$

on a

$$Q_n(x) = R_n(x) + \frac{(2n+\alpha) J_n H_n}{\alpha J_0} X_n Q_0.$$

C'est bien la forme générale que nous avons trouvée, et l'on voit que la constante

$$\frac{(2n+\alpha) J_n H_n}{\alpha J_0}$$

doit être égale à l'unité. Toutefois, les intégrales précédentes n'ont un sens que si l'on a $\alpha > 0$. La démonstration suppose donc remplie cette condition.

Les fonctions de seconde espèce peuvent recevoir d'autres expressions très-élégantes.

Par exemple, si l'on différentie n fois l'équation différentielle à laquelle satisfont X_n et U_n,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{dy}{dx} + n(n+\alpha)y = 0,$$

on trouve

$$x(1-x)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + [n+\gamma-(\alpha+2n+1)x]\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0,$$

équation qui admet deux solutions :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0, \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{C}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

La première dérive de X_n, la seconde de U_n. On a donc

(55) $$\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} = \frac{C}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

et, par suite,

$$(56)\qquad U_n = C\left(\int_x^\infty\right)^{n+1} \frac{dx}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}} = C\int_x^\infty \frac{dx^{n+}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+}}.$$

On en déduit

$$Q_n = Cx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

La constante C se détermine par la considération du premier terme du développement, et l'on trouve

$$(57)\qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\gamma}\int_x^\infty \frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

ce qu'on peut aussi écrire, d'après un théorème connu relatif aux intégrations répétées,

$$(58)\quad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{(y-x)^n dy}{y^{n+\gamma}(1-y)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

équation toute pareille à celle de Jacobi et se prêtant à la méthode de Laplace pour l'approximation de Q_n.

Nous donnerons enfin une expression de Q_n, qui n'est que curieuse.

L'équation (32), à laquelle satisfait Q_n, est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dV}{dx} x^{1-\gamma-n}(1-x)^{\gamma-\alpha-n}\right] = Cx^{-\gamma-n}(1-x)^{\gamma-\alpha-n+1}.$$

Il résulte de cette remarque la nouvelle expression de Q_n

$$Q_n = C\frac{d^n}{dx^n} x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}$$

comme dérivée $n^{\text{ième}}$. Le calcul de la constante C nous donne le résultat

$$(59)\qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(2n+\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^{\gamma+n}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

Enfin nous ajouterons cette remarque, que la formule de Jacobi peut aussi s'écrire

$$(60) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 \frac{x^{\gamma+n-1}(1-y)^{\alpha+n-\gamma}}{y-x} dy.$$

On voit que nous avons huit expressions différentes des fonctions Q_n.

XVI.

Il nous semble que la méthode employée dans cette partie de notre travail va au delà du problème que nous avons traité, et qu'elle pourra s'étendre à l'étude d'une classe étendue de développements, de tous ceux qui sont ordonnés suivant des fonctions formant une suite de Sturm. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que ces fonctions soient des polynômes de degrés 0, 1, ..., $X_0, X_1, \ldots$ jouissant de la propriété suivante :

Il existe une fonction $f(x)$ telle que l'on ait

$$(61) \qquad \int_b^a f(x)\, X_m X_n dx = 0$$

toutes les fois que m est différent de n.

On peut d'abord démontrer, et cette propriété est du reste connue, que ces polynômes forment une suite de Sturm.

Remarquons d'abord qu'il résulte de la formule précédente que l'on a

$$(62) \qquad \int_a^b f(x) P X_n dx = 0,$$

P étant un polynôme quelconque de degré inférieur à n.

Ce point étant admis, supposons, pour préciser, qu'on ait multiplié chaque polynôme par un nombre tel que le coefficient de la plus haute puissance de x soit l'unité. Le premier X_0 sera égal à 1. De plus, le produit xX_n pourra évidemment s'exprimer de la manière

suivante :

$$xX_n = X_{n+1} + C_0 X_n + C_1 X_{n-1} + \ldots + C_n X_0.$$

Je dis que, dans cette formule, toutes les constantes sont nulles à partir de C_2. Multiplions, en effet, les deux membres par

$$f(x) X_{n-p} dx,$$

et intégrons entre les limites a et b, nous aurons, en tenant compte de l'équation (61),

$$\int_a^b f(x)\, x X_{n-p} X_n\, dx = C_p \int_a^b X_{n-p}^2 f(x)\, dx.$$

Nous désignerons par J_p l'intégrale

$$J_p = \int_a^b X_p^2 f(x)\, dx.$$

que nous supposerons toujours différente de zéro. L'équation précédente deviendra

$$(63) \qquad \int_a f(x)\, x X_{n-p} X_n\, dx = C_p J_{n-p}.$$

Or, si p est égal ou supérieur à 2, xX_{n-p} sera au plus du degré $n-1$, et, en vertu de la formule (62), le premier membre sera nul. On aura donc

$$C_p = 0.$$

Ainsi l'équation (62) est de la forme

$$(64) \qquad xX_n = X_{n+1} + C_0 X_n + C_1 X_{n-1},$$

qui montre bien que les polynômes forment une suite de Sturm. On aurait de même

$$(65) \qquad xX_{n-1} = X_n + D_0 X_{n-1} + D_1 X_{n-2}.$$

Cela posé, dans la formule (63), faisons $p = 1$; on aura

$$C_1 J_{n-1} = \int_a^b f(x)\, x\, X_{n-1} X_n\, dx.$$

Substituons dans le second membre la valeur de $x X_{n-1}$ déduite de l'équation (65) ; on aura

$$C_1 J_{n-1} = \int f(x) X_n^2\, dx = J_n,$$

et par conséquent

$$C_1 = \frac{J_n}{J_{n-1}}. \tag{66}$$

L'équation (64) prend donc la forme

$$x X_n = X_{n+1} + \alpha_n X_n + \frac{J_n}{J_{n-1}} X_{n-1}. \tag{67}$$

Désignons maintenant par Y_n le résultat de la substitution de y à x dans les fonctions X_n et changeons x en y dans l'équation précédente. Elle deviendra

$$y Y_n = Y_{n+1} + \alpha_n Y_n + \frac{J_n}{J_{n-1}} Y_{n-1}.$$

Multiplions cette équation par X_n, la précédente par $-Y_n$ et ajoutons les résultats obtenus ; nous aurons

$$\frac{X_n Y_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{J_n (x - y)} - \frac{X_n Y_{n-1} - X_{n-1} Y_n}{J_{n-1} (x - y)}.$$

Si dans cette formule nous remplaçons successivement n par 0, 1, 2, ... et que nous fassions la somme des résultats obtenus, nous trouverons

$$\frac{X_0 Y_0}{J_0} + \frac{X_1 Y_1}{J_1} + \cdots + \frac{X_n Y_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{J_n (x - y)}. \tag{68}$$

Supposons maintenant qu'on veuille développer une fonction $\varphi(x)$ en une série de polynômes X_n

$$\varphi(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots$$

En multipliant les deux membres par $f(x) X_n dx$ et intégrant, on aura

$$A_n J_n = \int_a^b \varphi(x) f(x) X_n dx.$$

D'où il suit que l'on aura pour $\varphi(x)$ la série

$$\varphi(x) = \sum \frac{X_n}{J_n} \int_a^b \varphi(y) f(y) Y_n dy,$$

dont il s'agit de démontrer la convergence et de déterminer la somme. Or, en désignant par S_n la somme des $n+1$ premiers termes, on aura

$$S_n = \int_a^b \varphi(y) f(y) \left(\frac{X_0 Y_0}{J_0} + \ldots + \frac{X_n Y_n}{J_n}\right) dy$$

ou, d'après la formule (68),

$$S_n = \frac{1}{J_n} \int_a^b \varphi(y) f(y) \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{x-y} dy.$$

Toute la difficulté sera ramenée à la recherche de la limite de cette intégrale.

Considérons, en particulier, la fonction $\frac{1}{x-y}$ et soit

$$\frac{1}{x-y} = \frac{X_0 Q_0}{J_0} + \ldots + \frac{X_n Q_n}{J_n} + \ldots.$$

On aura

(69) $$Q_n = \int_a^b \frac{f(x) X_n dx}{x-y}.$$

Nous appellerons les polynômes X_n fonctions de première espèce et les fonctions Q_n fonctions de seconde espèce.

Il est aisé de reconnaître que les fonctions de seconde espèce satisfont à la même équation aux différences que les polynômes X_n. On a, en effet,

$$\frac{y Q_n}{J_n} - \frac{Q_{n+1}}{J_n} - \alpha_n Q_n - \frac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = \int_a^b \frac{f(x) dx}{x-y} \left(\frac{y X_n}{J_n} - \frac{X_{n+1}}{J_n} - \alpha_n X_n - \frac{X_{n-1}}{J_{n-1}}\right)$$

ou, en tenant compte de l'équation aux différences (67) pour les poly-

nômes X_n,

$$\frac{yQ_n}{J_n} - \frac{Q_{n+1}}{J_n} - \alpha_n Q_n - \frac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = -\int_a^b \frac{f(x)\,dx\,X_n}{J_n} = -\frac{1}{J_n}\int_a^b f(x)\,X_n X_0\,dx;$$

le second membre est nul tant que n est différent de zéro, et pour $n = 0$ il se réduit à -1. On a donc

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{yQ_n}{J_n} - \dfrac{Q_{n+1}}{J_{n+1}} - \alpha_n Q_n - \dfrac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = 0, \quad n > 0, \\ \dfrac{yQ_0}{J_0} - \dfrac{Q_1}{J_0} - \alpha_0 Q_0 = -1. \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer de proche en proche toutes les fonctions de seconde espèce au moyen de la première.

En éliminant α_n entre les équations (71), (67), on aura

$$\frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_n(x-y)} - \frac{X_n Q_{n-1} - X_{n-1} Q_n}{J_{n-1}(x-y)}$$

et par suite

$$\frac{X_1 Q_1}{J_1} + \frac{X_2 Q_2}{J_2} \cdots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_n(x-y)} - \frac{X_1 Q_0 - X_0 Q_1}{J_n(x-y)}.$$

En substituant à X_1, Q_1 leurs valeurs, on aura la formule définitive

$$(72)\qquad \frac{X_0 Q_0}{J_0} + \frac{X_1 Q_1}{J_1} + \ldots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{1}{x-y} - \frac{X_n Q_{n+1} - X_{n+1} Q_n}{J_n(x-y)}$$

et il ne restera plus qu'à chercher sous quelles conditions le dernier terme du second membre tend vers zéro pour avoir dans tous les cas les conditions de convergence de la série qui développe $\frac{1}{x-y}$.

Une fois cette recherche faite, le théorème de Cauchy permettra de développer toute fonction $F(z)$ en une série formée de fonctions de première et de seconde espèce.

C'est la méthode que nous avons suivie dans ce travail. Les rapports de la théorie précédente et de celle des fractions continues sont à peu près évidents.

D'abord, si l'on développe Q_n suivant les puissances de $\frac{1}{y}$, le dévelop-

pement commencera au terme en $\frac{1}{y^{n+1}}$. En effet, on a

$$-Q_n = \int_a^b \frac{f(x) X_n\,dx}{y-x}$$
$$= \int_a^b f(x) X_n\,dx \left[\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{y^n} + \frac{x^n}{y^n(y-x)}\right]$$

ou, en se rappelant les propriétés des intégrales, $\int f(x) x^p X_n\,dx$,

$$Q_n = \frac{1}{y^n} \int_a^b \frac{f(x) X_n x^n\,dx}{x-y}, \tag{73}$$

formule qui met en évidence la propriété annoncée.

D'autre part, on peut écrire

$$Q_n = \int_a^b f(x) \frac{X_n - Y_n}{x-y}\,dx + Y_n \int_a^b \frac{f(x)\,dx}{x-y}.$$

Le premier terme du second membre est un polynôme $R_n(y)$. Le second est le produit de Y_n par Q_0. On aura donc

$$Q_n = R_n + Y_n Q_0$$

ou

$$Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{Q_n}{Y_n}.$$

Le développement de $\frac{Q_n}{Y_n}$ suivant les puissances décroissantes de y commencera au terme $\frac{1}{y^{2n+1}}$. Donc $-\frac{R_n}{Y_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite du développement de

$$Q_0 = \int_a^b \frac{f(x)\,dx}{x-y}$$

en fraction continue.

Cette remarque établit le lien entre notre théorie et celle que M. Heine a constituée pour l'intégrale précédente.

Sur la percussion des corps ;

Par M. N. JOUKOVSKY,

Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

---

1. Poinsot, dans son Mémoire sur la percussion des corps [*], démontre que, dans les cas particuliers, on peut ramener la question relative à la percussion d'un corps et d'un point matériels dénués d'élasticité à la percussion de deux points. Les cas particuliers traités par l'auteur sont celui où la direction de percussion se trouve dans le plan passant par deux axes principaux d'inertie du corps, relatifs à son centre de gravité, et celui où la direction de percussion est perpendiculaire à ce plan.

Ce qui va suivre montre que la question la plus générale de percussion de deux corps libres, quel que soit leur degré d'élasticité, peut être ramenée à la percussion de deux points massifs.

2. Rappelons-nous auparavant les formules relatives à la percussion de deux billes.

Soient :

P l'impulsion des actions mutuelles;
m et m_1 les masses des billes;
v et v_1 les projections des vitesses des centres des billes sur la direction de P, où $v < v_1$;
u et u_1 les projections semblables après le choc.

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1857, 1859.

Nous aurons

$$(1) \qquad P = m(u - v) = m_1(v_1 - u_1),$$

$$(2) \qquad mv^2 + m_1 v_1^2 - mu^2 - m_1 u_1^2 = \varepsilon[m(v-u)^2 + m_1(v_1 - u_1)^2],$$

où ε est le coefficient du choc, qui est égal à zéro pour les billes parfaitement élastiques et à l'unité pour les billes dénuées d'élasticité.

Déformons l'équation (2) à l'aide de l'équation (1),

$$(3) \qquad u + v + \varepsilon(u - v) = u_1 + v_1 + \varepsilon(u_1 - v_1).$$

L'équation (3), réunie à l'équation (1), donne les quantités cherchées

$$(4) \qquad u = v + 2\frac{v_1 - v}{1+\varepsilon}\frac{m_1}{m+m_1},$$

$$(5) \qquad u_1 = v_1 - 2\frac{v_1 - v}{1+\varepsilon}\frac{m}{m+m_1},$$

$$(6) \qquad P = 2\frac{v_1 - v}{1+\varepsilon}\frac{mm_1}{m+m_1}.$$

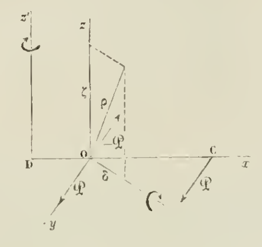
Les formules (4), (5) et (6) ne dépendent pas des rayons de billes; admettant que ces rayons diminuent à l'infini et que les masses des billes restent constantes, nous aurons le choc des points massifs.

3. Déterminons maintenant les changements des vitesses produites par le choc dans le mouvement d'un corps libre dont la masse est M. Menons par la direction de percussion P et le centre de gravité O du corps un plan, que nous nommerons plan de percussion. Abaissons du centre O une perpendiculaire sur la direction de P. Le point C de rencontre de cette perpendiculaire avec la direction de P sera, comme dans le Mémoire de Poinsot, le centre de percussion.

Posons $OC = h$.

Prenons les axes des coordonnées rectangulaires x, y, z, ayant pour origine le point O, pour le plan xOy le plan de percussion et pour l'axe Ox la droite OC.

En transportant le point d'application de la force P au point O, nous aurons une force P, dirigée vers l'axe Oy, et un couple (P, — P) dans



le plan xOy. La force P donnera au corps une vitesse de translation β dirigée vers l'axe Oy :

$$\beta = \frac{P}{M}. \tag{7}$$

Pour déterminer les vitesses angulaires θ_1, θ_2, θ_3 autour des axes Ox, Oy, Oz, produites par le couple (P, — P), représentons par

$$f(x, y, z) = 1 \tag{8}$$

l'équation d'un ellipsoïde d'inertie du corps par rapport au point O.

Nous aurons, à l'aide du théorème des moments,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta_1}f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta_2}f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta_3}f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= Ph. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Soient θ la vitesse angulaire de rotation résultante, et ξ, η, ζ les coordonnées du point d'intersection de l'axe de cette rotation avec la sur-

face d'ellipsoïde. Nous pouvons présenter les équations (9) ainsi :

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\xi} f(\xi,\eta,\zeta) = 0, \\ \dfrac{d}{d\eta} f(\xi,\eta,\zeta) = 0, \\ \dfrac{\theta}{2\rho}\dfrac{d}{d\zeta} f(\xi,\eta,\zeta) = \mathrm{P}h, \end{cases}$$

où $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Les deux premières équations (10) montrent que l'axe de rotation θ est le diamètre conjugué du plan de percussion par rapport à l'ellipsoïde (8). A l'aide du théorème bien connu des fonctions homogènes

$$\xi\frac{d}{d\xi} f(\xi,\eta,\zeta) + \eta\frac{d}{d\eta} f(\xi,\eta,\zeta) + \zeta\frac{d}{d\zeta} f(\xi,\eta,\zeta) = 2f(\xi,\eta,\zeta) = 2,$$

la troisième équation (10) peut être mise sous la forme

$$(11)\qquad \theta = \mathrm{P}h\rho\zeta.$$

En nommant δ la projection de ρ sur le plan $x\mathrm{O}y$, nous pouvons décomposer la rotation θ par les deux suivantes :

$$(12)\qquad \theta_3 = \mathrm{P}h\zeta^2,$$

$$(13)\qquad \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} = \mathrm{P}h\zeta\delta,$$

dont la premiere a pour axe de rotation Oz, et la seconde la projection de ρ sur le plan $x\mathrm{O}y$.

La rotation θ_3 se compose avec la translation β, et donne une rotation avec la même vitesse angulaire θ_3 autour d'un axe DZ′ parallèle à l'axe Oz. Cet axe coupe Ox dans un point D, pour lequel

$$\mathrm{OD} = \frac{\beta}{\theta_3} = \frac{1}{\mathrm{M}h\zeta^2}.$$

En posant

$$\mathrm{OD} = i,$$

(14) $$\frac{1}{\mathrm{M}\zeta^2} = k^2,$$

nous trouvons

(15) $$hi = k^2.$$

Les points C et D sont réciproques.

Ainsi la percussion augmente le mouvement du corps de deux rotations, dont l'une a pour vitesse angulaire $\mathrm{P}h\delta\zeta$ et pour axe δ, et l'autre a pour vitesse angulaire $\mathrm{P}h\zeta^2$ et pour axe la perpendiculaire au plan de percussion passant par le point D.

4. Nous chercherons maintenant à déterminer la grandeur de percussion à l'aide des vitesses des points s'entre-choquant des deux corps.

Soient v et u les projections des vitesses du point choqué sur la direction de la percussion P avant et après le choc. Le changement de v en u provient seulement de la rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du choc; nous pouvons donc écrire

$$u - v = \mathrm{P}h\zeta^2(h + i) = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\,\frac{h^2 + k^2}{k^2}.$$

Pour un autre corps M_1, qui se choque avec M, nous trouvons une formule semblable, en changeant P en $-$ P :

$$v_1 - u_1 = \frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{M}_1}\,\frac{h_1^2 + k_1^2}{k_1^2},$$

où h_1, k_1, v_1, u_1 ont pour le corps M_1 les mêmes significations que h, k, v, u pour le corps M, et

$$v_1 > v.$$

Nous trouvons maintenant les équations

$$(16)\qquad P = \frac{k^2}{h^2+k^2} M(u-v) = \frac{k_1^2}{h_1^2+k_1^2} M_1(v_1-u_1).$$

qui se réduisent à (1), en posant

$$(17)\qquad m = M\frac{k^2}{h^2+k^2},\quad m_1 = M_1\frac{k_1^2}{h_1^2+k_1^2}.$$

Nous nommerons m et m_1 les masses des corps ramenées au point du choc.

5. Il nous reste à considérer le changement de force vive des corps produit par le choc.

Soient

T et T_1 les forces vives des corps M et M_1 avant les chocs;
$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_1$ les forces vives des deux corps après le choc;
$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ les forces vives des vitesses acquises ou perdues par les corps M et M_1 pendant le choc.

Nous aurons une équation connue [*]

$$T + T_1 - \mathcal{T} - \mathcal{T}_1 = \varepsilon(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}_1),$$

dans laquelle ε est le coefficient du choc. Cette équation peut être mise sous la forme

$$(18)\qquad \mathcal{T} - T + \varepsilon\mathfrak{T} = -(\mathcal{T}_1 - T_1 + \varepsilon\mathfrak{T}_1).$$

Déterminons sa première partie.

Posons qu'avant le choc les projections de la vitesse du centre O sur les axes x, y, z seront

$$w_1,\ w_2,\ w_3,$$

---

[*] *Traité de Mécanique générale*, par Resal, t. I, p. 417.

et les vitesses angulaires autour de ces axes seront

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3.$$

Nous trouverons après le choc, pour les mêmes quantités,

$$w_1,\ w_2+\beta,\ w_3,\ \omega_1+\theta_1,\ \omega_2+\theta_2,\ \omega_3+\theta_3.$$

D'après l'équation (8), on peut écrire

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{T} &= \mathrm{M}(w_1^2+w_2^2+w_3^2)+f(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\\
2\,\mathcal{T} &= \mathrm{M}[w_1^2+(w_2+\beta)^2+w_3^2]+f(\omega_1+\theta_1,\ \omega_2+\theta_2,\ \omega_3+\theta_3),\\
2\,\mathcal{E} &= \mathrm{M}\beta^2+f(\theta_1,\theta_2,\theta_3).
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= \tfrac{1}{2}\theta_3\frac{d}{d\theta_3}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathrm{P}^2h^2\zeta^2,\\
f(\theta_1+\omega_1,\ \theta_2+\omega_2,\ \theta_3+\omega_3)&\\
&= f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)+\omega_1\frac{d}{d\theta_1}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)+\omega_2\frac{d}{d\theta_2}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\\
&\quad+\omega_3\frac{d}{d\theta_3}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)+f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\\
&= \mathrm{P}^2h^2\zeta^2+2\omega_3\mathrm{P}h+f(\omega_1,\omega_2,\omega_3).
\end{aligned}$$

Nous trouvons

$$\mathcal{T}-\mathrm{T}+\varepsilon\mathcal{E}=\frac{\mathrm{P}}{2}\left[2(w_2+\omega_3h)+\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{k^2+h^2}{k^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{k^2+h^2}{k^2}\right],$$

ou, à cause de l'équation (16),

$$\mathcal{T}-\mathrm{T}+\varepsilon\mathcal{E}=\frac{\mathrm{P}}{2}[u+v+\varepsilon(u-v)].$$

Pour le corps M_1, nous devons changer P en $-$ P, ce qui donne

$$(\mathcal{T}_1-\mathrm{T}_1+\varepsilon\mathcal{E}_1)=-\frac{\mathrm{P}}{2}[(u_1+v_1+\varepsilon(u_1-v_1)].$$

En mettant les quantités trouvées dans l'équation (8) et la divisant par $\frac{P}{2}$, nous trouvons une équation toute semblable à l'équation (3).

6. La question de la percussion de deux corps libres est maintenant résolue. Il suffit seulement de concentrer dans les points s'entre-choquant des corps les masses ramenées, et de traiter le choc comme celui des points massifs, ayant le même coefficient du choc que les corps. En trouvant P par la formule (6), il reste à augmenter les mouvements des corps des rotations montrées dans le n° 2.

Sur un cas particulier de mouvement d'un point matériel;

Par M. N. JOUKOVSKY,

Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

---

1. Ne se donnant pas la peine de trouver les intégrales générales des équations du mouvement d'un point matériel, on peut quelquefois donner des intégrales particulières de ces équations, en admettant que la vitesse initiale dépend des coordonnées initiales.

Nous allons montrer, dans ce qui suit, une manière bien facile de trouver de pareilles intégrales pour le mouvement sur un plan, quand les lignes de niveau seront des lignes isothermiques.

2. Soient

$$q = \text{const.} \tag{1}$$

l'équation de la famille des lignes de niveau, et

$$q_1 = \text{const.} \tag{2}$$

l'équation de la famille des lignes perpendiculaires aux lignes de niveau;

h et h_1 les paramètres différentiels des fonctions q et q_1;

ρ le rayon de courbure de la trajectoire;

g la force rapportée à l'unité de la masse;

$f(q)$ la fonction potentielle des forces;

v la vitesse;

θ l'angle entre la direction de la vitesse et la direction de la force;

ψ et φ les angles formés par ces directions et un axe donné.

En ayant égard à la figure, dans laquelle ma est la trajectoire du point matériel, mb la ligne de niveau et mc la ligne perpendiculaire

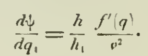
aux lignes de niveau, nous pouvons écrire

$$\frac{v^2}{\rho} = g \operatorname{sn} \theta = f'(q) h \operatorname{sn} \theta ;$$

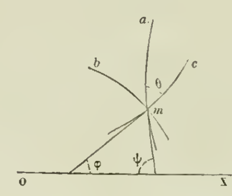
mais, si l'angle ψ est considéré comme une fonction de q_1, on aura

$$\frac{1}{\rho} = h_1 \frac{d\psi}{dq_1} \operatorname{sn} \theta ;$$

d'où



$$\frac{d\psi}{dq_1} = \frac{h}{h_1} \frac{f'(q)}{v^2}.$$



A présent, si les lignes de niveau sont isothermiques, on pourra choisir les fonctions q et q_1, tellement que

$$h = h_1,$$

et notre formule deviendra

$$\frac{d\psi}{dq_1} = \frac{f'(q)}{v^2}.$$

Nous pouvons éliminer v^2 de cette équation à l'aide du théorème des forces vives,

$$(3) \qquad v^2 = 2 f(q) + c,$$

et nous trouverons

$$(4) \qquad \frac{d\psi}{dq_1} = \frac{f'(q)}{2 f(q) + c}.$$

3. Admettons encore que la fonction p satisfasse à l'équation

$$(5) \qquad \frac{f'(q)}{2 f(q) + c} = \mu,$$

où μ est une quantité constante; après avoir intégré, nous aurons

$$(6) \qquad 2 f(q) + c = \beta e^{2\mu q}.$$

En même temps l'équation (4) donnera

$$\frac{d\psi}{dq_1} = \mu, \tag{7}$$

$$\psi + \alpha = \mu q_1, \tag{8}$$

β et α étant des constantes arbitraires.

En remarquant que

$$\theta = 180^\circ - \psi - \varphi,$$

nous trouverons, de la formule (8), l'équation différentielle de la trajectoire

$$\operatorname{tang}(\mu q_1 + \varphi - \alpha) + \frac{dq_1}{dq} = 0. \tag{9}$$

Enfin, des équations (3) et (6), nous déduirons la vitesse pour chaque point de la trajectoire

$$v^2 = \beta e^{2\mu q}. \tag{10}$$

Ainsi sera déterminé le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de la force dont la fonction potentielle satisfait à l'équation (6); mais ce mouvement ne correspondra qu'à un cas particulier, la vitesse initiale étant donnée par l'équation (10).

4. Considérons, par exemple, le cas pour lequel les lignes (1) sont des cercles concentriques, et les lignes (2) les droites qui passent par le centre de ces cercles; après avoir désigné par r la distance du point considéré de ce centre commun, et remarqué que φ, dans ce cas, sera l'angle de r avec un axe donné, posons que

$$q = \log r, \quad q_1 = \varphi;$$

ce qui satisfait à la condition

$$h = h_1.$$

Les équations (6) et (10) deviendront

$$2f(q) + c = \beta r^{2\mu}, \tag{11}$$

$$v^2 = \beta r^{2\mu}. \tag{12}$$

La dérivée de la fonction $f(q)$, par rapport à r, nous donnera la force g,

$$(13) \qquad g = \beta\mu r^{2\mu-1};$$

elle sera attractive, si le coefficient μ est négatif, et répulsive, s'il est positif; car on voit de (12) que β doit être positif. L'équation (9) prendra la forme suivante :

$$(14) \qquad d\log r + \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}[\varphi(\mu+1)-\alpha]} = 0,$$

et pourra être intégrée

$$(15) \qquad r^{\mu+1}\sin[(\mu+1)\varphi-\alpha] = \varkappa,$$

$\varkappa$ étant une constante.

L'équation (15) ne donne pas la trajectoire quand

$$\mu = -1;$$

mais, dans ce cas-là, l'équation (14) prend la forme

$$d\log r = \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}\alpha},$$

d'où nous trouvons l'équation de la spirale logarithmique

$$r = \varkappa e^{\frac{\varphi}{\operatorname{tang}\alpha}}$$

Ainsi nous voyons qu'on peut trouver, de cette manière, le mouvement d'un point matériel dans le cas de la force centrale proportionnelle à r^k, quel que soit le nombre k; seulement la force doit être supposée attractive quand

$$\frac{k+1}{2} < 0,$$

et répulsive quand

$$\frac{k+1}{2} > 0.$$

TABLE DES MATIÈRES

TROISIÈME SÉRIE. — TOME IV.

Pages.

Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série; par M. *G. Darboux*........... 5

Sur les surfaces réglées; par M. *A. Mannheim*........................... 57

Réponse à la Note de M. Allégret sur le Problème des trois corps; par M. *Émile Mathieu*.. 61

Sur la déduction d'un nouveau principe d'Électrodynamique; par M. *R. Clausius*. 63

Sur le développement, en séries, des racines réelles des équations; par M. *Yvon Villarceau*.. 119

Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques; par M. *L. Fuchs*.. 125

Géométrie et Géomécanique. Aperçu des faits qui montrent la connexion de ces sciences, dans l'état présent de leur développement; par M. *W. Fiedler*.... 141

Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu + 1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0$; par M. *Worms de Romilly*.. 177

Sur de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs représentent exactement la fonction elliptique de première espèce à module quelconque; par M. *H. Molins*.. 187

Sur les courbes de troisième classe; par M. *Laguerre*...................... 213

Sur le calcul inverse des intégrales définies; par M. *H. Laurent*............. 225

Pages.

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux; par M. *Laguerre*....... 247

Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques; par M. *Villié*.. 257

Sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux cercles; par M. *Weill*. 265

Origine géométrique et représentation géométrique des fonctions elliptiques, abéliennes et de transcendantes d'ordres supérieurs; par M. *Yvon Villarceau*. 305

Note sur le contact géométrique des courbes et des surfaces; par M. *J. Collet*.. 315

Complément à une Étude intitulée « Essai sur la théorie des eaux courantes » (publiée dans les tomes XXIII, XXIV du *Recueil des Savants étrangers*) et à un Mémoire « Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides » (inséré au tome XIII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, 1868); par M. *J. Boussinesq*........................ 335

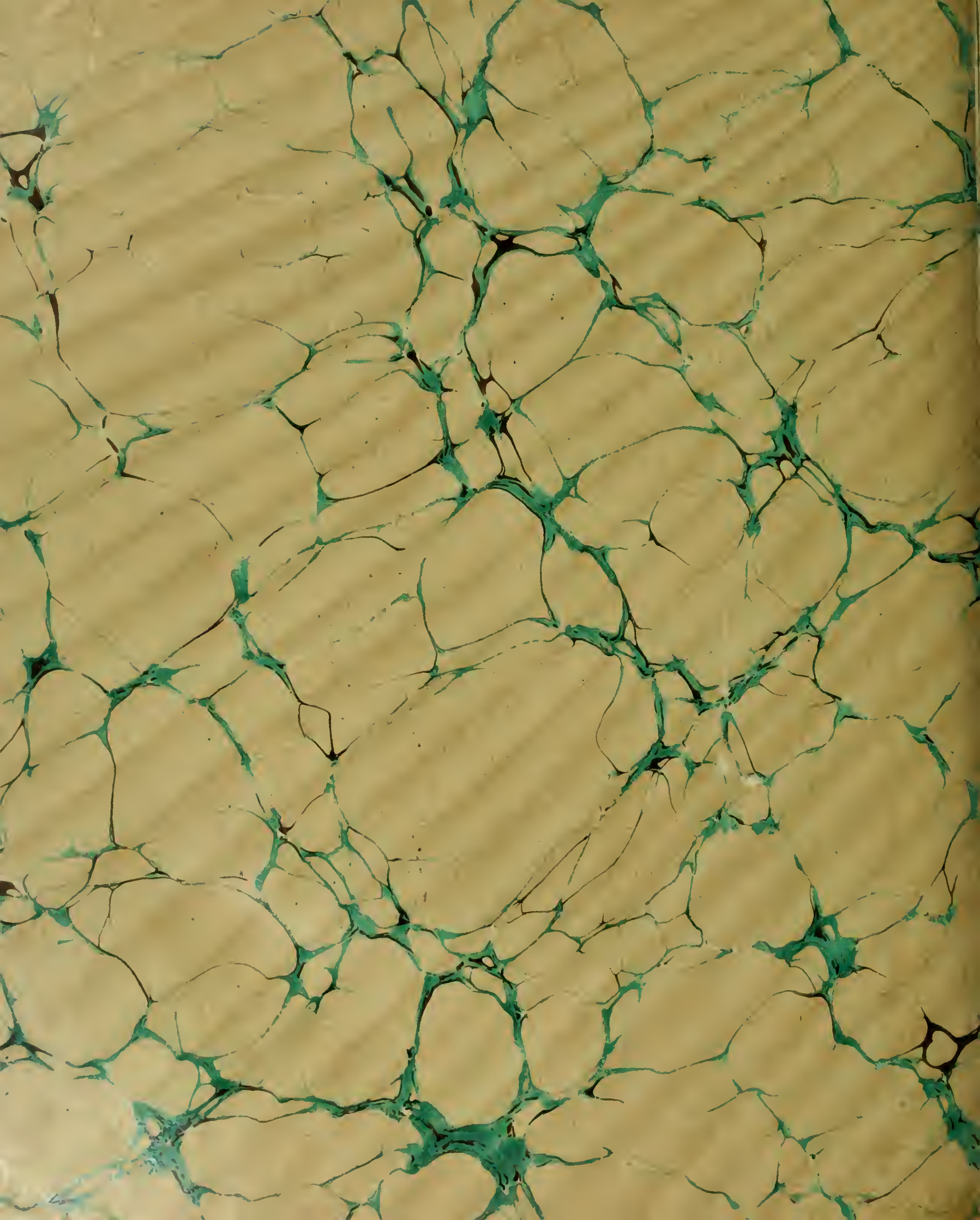
Sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série; par M. *G. Darboux*................ 377

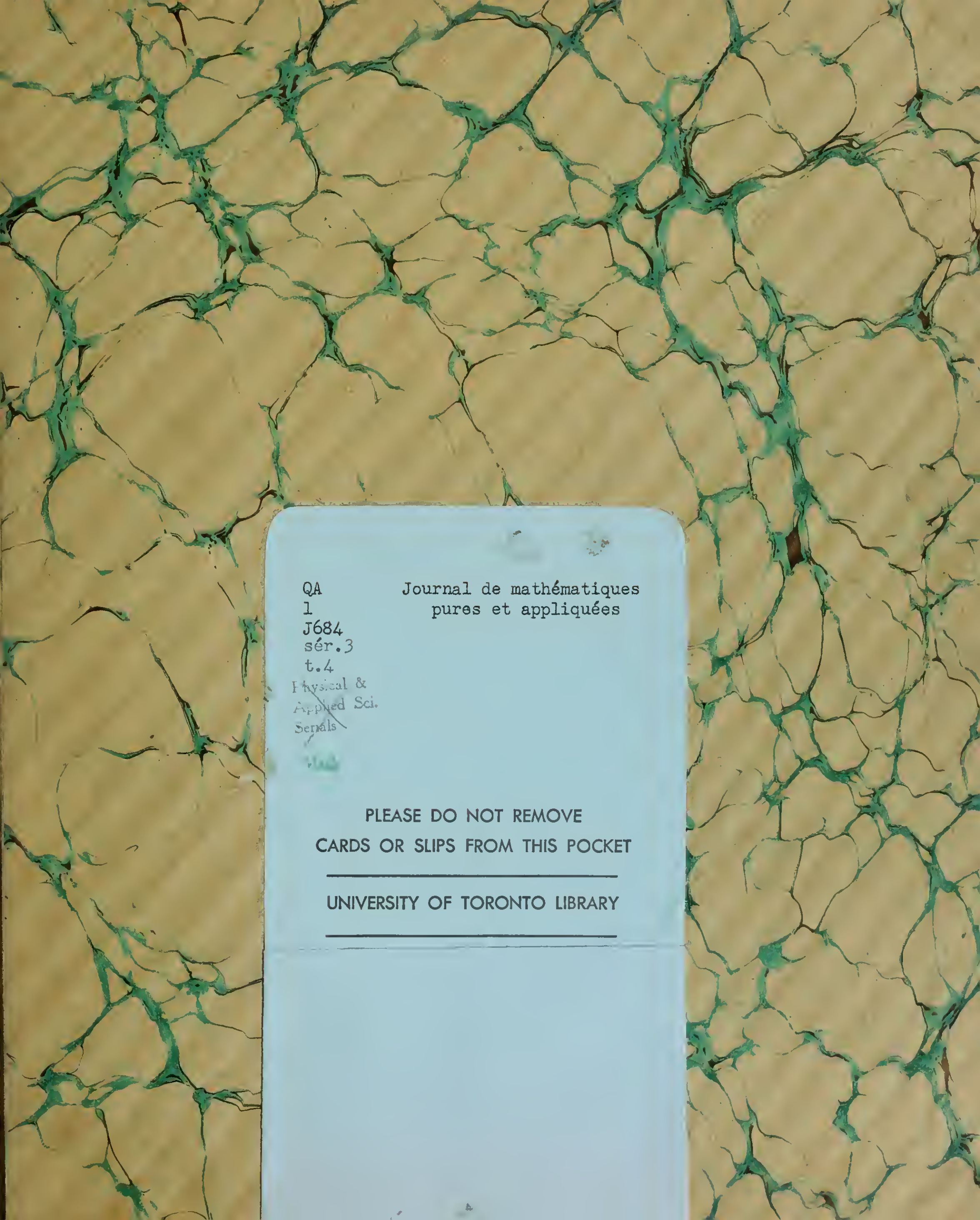
Sur la percussion des corps; par M. *N. Joukovsky*........................ 417

Sur un cas particulier de mouvement d'un point matériel; par M. *N. Joukovsky*. 425

FIN DU TOME IV DE LA TROISIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMP. DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, QUAI DES AUGUSTINS, 55.





QA
1
J684
sér.3
t.4
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

